

Sobre álgebras quasitriangulares quasi-Hopf y un grupo estrechamente relacionado con $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

V. G. Drinfel'd

21 de julio de 2024

Resumen

Se prueba un teorema que ya había sido anunciado sobre la estructura de álgebra quasitriangular quasi-Hopf en la teoría de perturbaciones con respecto a la constante de Plank. En el proceso se usó la versión pro unipotente de un grupo definido por Grothendieck que contiene $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

1. Introducción

Este artículo se dedica principalmente a la prueba de un teorema anunciado en [1] sobre la estructura de álgebra quasitriangular quasi-Hopf en la teoría de perturbaciones con respecto a la constante de Plank. Como tecnicidad se usó la versión pro unipotente de un grupo definido por Grothendieck [2], un grupo muy interesante pues esta relacionado con $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Recordemos las definiciones básicas de [1]. La diferencia entre un álgebra quasi-Hopf y un álgebra de Hopf es que el axioma de coasociatividad se reemplaza por una condición mas débil. En detalle, un álgebra quasi-Hopf sobre un anillo conmutativo k , de acuerdo a [1], es un conjunto $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, donde A es un k -álgebra asociativa con unidad, Δ es un homomorfismo $A \rightarrow A \otimes A$, ε es un homomorfismo $A \rightarrow k$ (asumimos que $\Delta(1) = 1$, $\varepsilon(1) = 1$), y Φ es un elemento invertible en $A \otimes A \otimes A$, los cuales satisfacen

$$(\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1}, a \in A, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi) \\ &= (1 \otimes \Phi) \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta, \quad (1.3)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\Phi) = 1, \quad (1.4)$$

además de un axioma que en el caso Hopf, $\Phi = 1$, se restringe a la existencia y biyectividad del antípoda. En nuestro caso, cuando $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ es una deformación de un álgebra de Hopf parametrizada por un parámetro “infinitamente pequeño” h , el axioma se satisface automáticamente por el Teorema 1.6 de [1]. De igual manera que el caso de Hopf, Δ es denominado la comultiplicación y ε es la counidad.

El artículo [1] generalizó al caso quasi-Hopf la noción de álgebra quasitriangular de Hopf definido en § 10 de [3] e inspirado por el método cuántico del problema inverso [4]. Específicamente, un álgebra quasitriangular quasi-Hopf es un conjunto $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ donde $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ es un álgebra quasi-Hopf y R es un elemento invertible en $A \otimes A$ tal que

$$\Delta'(a) = R\Delta(a)R^{-1}, a \in A \quad (1.5)$$

$$(\Delta \otimes \text{id})(R) = \Phi^{312}R^{13}(\Phi^{132})^{-1}R^{23}\Phi, \quad (1.6a)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R) = (\Phi^{231})^{-1}R^{13}\Phi^{213}R^{12}\Phi^{-1}. \quad (1.6b)$$

Donde $\Delta' = \sigma \circ \Delta$, y $\sigma : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ intercambia las entradas. Si $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ entonces por definición $R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $R^{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R^{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$. También debemos explicar que, por ejemplo, si $\Phi = \sum_j x_j \otimes y_j \otimes z_j$, entonces $\Phi^{312} = \sum_j y_j \otimes z_j \otimes x_j$.

La razón de los axiomas (1.1) - (1.6) es que las representaciones de un álgebra A quasitriangular quasi-Hopf forma una categoría quasitensorial en el sentido de [5], ver también § 3 de [1]. Esto significa que, primero, hay un functor producto tensorial en la categoría de representaciones de A : dadas dos representaciones de A , en los k módulos V_1 , y V_2 , la representación de A en $V_1 \otimes V_2$ se define como la composición $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \rightarrow \text{End}_k(V_1 \otimes V_2)$. Segundo, existen isomorfismos functoriales de conmutación $c : V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$ y de asociación $a : (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ donde V_i son representaciones de A . A saber, a es la operación en $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ que corresponde a Φ , y c es la composición de la operación en $V_1 \otimes V_2$ que corresponde a R y el isomorfismo usual $\sigma : V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$. Tercero, existe la representación identidad k con isomorfismos $V \otimes k \xrightarrow{\sim} V$ y $k \otimes V \xrightarrow{\sim} V$ para cada representación V . Finalmente, (1.2), (1.4) y (1.6) garantizan la conmutatividad de los diagramas:

$$((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4 \xrightarrow{\sim} (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4) \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes (V_3 \otimes V_4)) \quad (1.7)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ (V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4 & \xrightarrow{\sim} & V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4) \\ & & \downarrow \sim \\ & & V_1 \otimes V_2 \\ & \swarrow \sim & \searrow \sim \\ (V_1 \otimes k) \otimes V_2 & \xrightarrow{\sim} & V_1 \otimes (k \otimes V_2) \end{array} \quad (1.8)$$

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{c} V_3 \otimes (V_1 \otimes V_2) \xleftarrow{a} (V_3 \otimes V_1) \otimes V_2 \quad (1.9a)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow a & & \uparrow c \otimes \text{id} \\ V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \xrightarrow{\text{id} \otimes c} & V_1 \otimes (V_3 \otimes V_2) \xrightarrow{a^{-1}} (V_1 \otimes V_3) \otimes V_2 \\ V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \xrightarrow{c} & (V_2 \otimes V_3) \otimes V_1 \xrightarrow{a} V_2 \otimes (V_3 \otimes V_1) \end{array} \quad (1.9b)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow a^{-1} & & \uparrow \text{id} \otimes c \\ (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \xrightarrow{c \otimes \text{id}} & (V_2 \otimes V_1) \otimes V_3 \xrightarrow{a} V_2 \otimes (V_1 \otimes V_3) \end{array}$$

Es de notar que en general $R^{21} \neq R^{-1}$, en consecuencia el isomorfismo de conmutatividad no es involutorio (una de las diferencias entre categorías quasitensoriales y categorías tensoriales [6]).

Si $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ es un álgebra quasitriangular quasi-Hopf, y si F es un elemento invertible de $A \otimes A$ que satisface $(\text{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1 = (\varepsilon \otimes \text{id})(F)$, entonces, definiendo

$$\tilde{\Delta}(a) = F \cdot \Delta(a) \cdot F^{-1}, \quad (1.10)$$

$$\tilde{\Phi} = F^{23} \cdot (\text{id} \otimes \Delta)(F) \cdot \Phi \cdot (\Delta \otimes \text{id})(F^{-1}) \cdot (F^{12})^{-1}, \quad (1.11)$$

$$\tilde{R} = F^{21} \cdot R \cdot F^{-1}, \quad (1.12)$$

obtenemos una nueva álgebra quasitriangular quasi-Hopf $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi}, \tilde{R})$; decimos que fue obtenida de $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ torsiondola vía F . Las quasicategorías que corresponden a $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ y a $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi}, \tilde{R})$ son equivalentes. Así que naturalmente nos referimos a la torsión como una "transformación de gauge".

Estudiaremos álgebras quasitriangulares quasi-Hopf en el sentido de la teoría de perturbaciones con respecto a \hbar , restringiéndonos al caso de característica 0. Daremos precisión a estas palabras en la siguiente definición (EUC es un acrónimo de "Envolvente Universal Cuantizada").

Definición. Sea k campo de característica 0. Decimos que A es una álgebra quasitriangular quasi-Hopf EUC sobre $K[[h]]$ si es una álgebra topológica quasitriangular quasi-Hopf $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ sobre $k[[h]]$ tal que A/hA es un álgebra universal envolvente con la comultiplicación estándar, y A como $k[[h]]$ -módulo topológico, es isomorfo a $V[[h]]$ para algún espacio vectorial V sobre k .

Nota: Como A/hA es un álgebra universal envolvente, de la ecuación (1.4) y el que Φ sea invertible, concluimos que $\Phi \equiv 1 \pmod{h}$. Similarmente, $R \equiv 1 \pmod{h}$, y para torsiones de álgebras quasitriangulares quasi-Hopf EUC, $F \equiv 1 \pmod{h}$.

Inspirados en [7–9], el método siguiente fue propuesto en [1] para construir álgebras quasitriangulares quasi-Hopf EUC. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre $k[[h]]$ que, viéndola como $k[[h]]$ -módulo, es isomorfo a $V[[h]]$ para algún espacio V sobre k . (Esta condición en \mathfrak{g} significa que \mathfrak{g} es una deformación de un álgebra de Lie \mathfrak{g}_0 sobre k , donde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}/h\mathfrak{g}$; llamamos a este tipo de álgebras \mathfrak{g} álgebra por deformación). Supongamos la existencia de un tensor $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que es \mathfrak{g} -invariante, donde \otimes es la completación del producto tensorial. Sea $A = U\mathfrak{g}$, donde $U\mathfrak{g}$ es la completación h -ádica del álgebra universal envolvente. Definimos en la manera usual $\varepsilon : A \rightarrow k[[h]]$ y $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ (donde \otimes es la completación del producto tensorial), y sea $R = e^{ht/2}$. Entonces se cumplen (1.3)-(1.5), y falta encontrar $\Phi \in A \otimes A \otimes A$ que satisfice (1.1), (1.2), (1.4) y (1.6) (nótese que en este caso (1.1) implica la \mathfrak{g} -invariancia de Φ). El primer resultado principal es:

Teorema A. *El susodicho Φ existe, y es único hasta por una torsión por elementos simétricos \mathfrak{g} -invariantes $F \in A \otimes A$.*

Notas. ■ *Si Δ es la comultiplicación usual en $A = U\mathfrak{g}$ y $R = e^{ht/2}$, y $\tilde{\Delta}, \tilde{R}$ se definen por las formulas (1.10) y (1.12), entonces las igualdades $\tilde{\Delta} = \Delta, \tilde{R} = R$ son equivalentes a la \mathfrak{g} -invariancia y simetría de F (t conmuta con los elementos \mathfrak{g} -invariantes de $A \otimes A$, pues $t = (\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)/2$, donde $C \in U\mathfrak{g}$ es el elemento de Casimir).*

- *Además del Teorema A probaremos que si reemplazamos la condición $R = e^{ht/2}$ por la, a primera impresión, condición más débil de simetría y \mathfrak{g} -invariancia de R , entonces $R = e^{ht/2}$ para algún $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.*

La unicidad en el Teorema A se prueba de manera simple (ver Proposiciones 3.2 y 3.4). Cuando $k = \mathbb{C}$, lo que se propone en [1] es una construcción explícita pero trascendental de Φ por medio del sistema de ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov (abreviado: sistema KZ) que surge de la teoría de campos conformes [10]. Este Φ , en lo sucesivo denotado por Φ_{KZ} , es expresado en términos de $\tau = ht$ por una "fórmula \mathbb{C} -Universal"; es decir, si escribimos Φ_{KZ} en la forma

$$\Phi_{KZ} = \sum_{m,n,p} a_{(m,n,p)}^{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n l_1 \dots l_p} e_{i_1 \dots i_m} \otimes e_{j_1 \dots j_n} \otimes e_{l_1 \dots l_p},$$

donde e_i forman una base de \mathfrak{g} como $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -módulo topológico y los tensores $a_{(m,n,p)}$ son simétricos en cada grupo de índices i, j, l , entonces los $a_{(m,n,p)}$ se expresan en términos de constantes estructurales $c_{r,s}^t$ del álgebra \mathfrak{g} y los componentes τ^{uv} del tensor τ de acuerdo con las reglas del cálculo tensorial acíclico con coeficientes en \mathbb{C} , mientras que (1.1), (1.2), (1.4), y (1.6) se siguen, de acuerdo con las reglas del cálculo tensorial acíclico, del hecho de que los $c_{r,s}^t$ son las constantes estructurales de un álgebra de Lie y τ es simétrico e invariante. (Ser acíclico significa, por ejemplo, la exclusión de la expresión $c_{ri}^j c_{sj}^l c_{il}^i$, donde i, j, l forman un “ciclo”). Entre los coeficientes de la fórmula \mathbb{C} -universal aparecen (ver (2.15) y (2.18)) los números $\zeta(2m+1)/(2\pi i)^{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, que son imaginarios y probablemente trascendentales. Así, para $k \not\cong \mathbb{C}$ la parte de existencia en el Teorema A no se sigue de la construcción de Φ_{KZ} . Sin embargo, se prueba en [3], junto con el teorema siguiente.

Teorema A'. Existe una fórmula \mathbb{Q} -universal que expresa el elemento Φ del Teorema A en términos de $\tau = ht$. Es única hasta por torsión vía un elemento $F = F(\tau)$ simétrico \mathbb{Q} -universal.

El álgebra quasitriangular quasi-Hopf suministrada por el Teorema A será llamada *álgebra estándar*.

Teorema B. Cualquier álgebra quasitriangular quasi-Hopf EUC se puede torcer en un álgebra estándar por un elemento adecuado.

La fórmula \mathbb{C} -universal que expresa Φ_{KZ} en términos de $\tau = ht$ es de la forma $\Phi_{KZ} = \exp P_{KZ}(\tau^{12}, \tau^{23})$ donde P_{KZ} es una serie formal de Lie (es decir, conmutadores) con coeficientes en \mathbb{C} (ver § 2). El Teorema A se puede fortalecer como sigue.

Teorema A". Existe una serie formal de Lie P con coeficientes en \mathbb{Q} tales que el Φ del Teorema A se puede elegir como $\exp P(ht^{12}, ht^{23})$.

Si Φ tiene la forma $\exp P(ht^{12}, ht^{23})$ donde P es una serie formal de Lie, entonces el $\tilde{\Phi}$ definido por la fórmula (1.11) no es, en general, de la misma forma. Sin embargo, en el conjunto de series de Lie P sobre k tales que $\Phi = \exp P(ht^{12}, ht^{23})$ y $R = e^{ht/2}$ satisface (1.2) y (1.6), podemos definir (ver § 4) una acción natural transitiva de un cierto grupo, que llamamos el grupo de Grothendieck-Teichmüller y lo denotamos por $GT(k)$. Esta acción forma la base de la prueba del Teorema A". La definición de $GT(k)$ es en esencia prestada de [2], donde, en particular, se muestra como construir un morfismo canónico $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GT(\mathbb{Q}_l)$ donde $\overline{\mathbb{Q}}$ es la cerradura algebraica de \mathbb{Q} en \mathbb{C} y l es un número primo.

La estructura del artículo es la siguiente. § 2 esta dedicada a Φ_{KZ} . En § 3, los métodos de [1] se usan para probar los Teoremas A, A' y B. En § 4 definimos el grupo de Grothendieck-Teichmüller (en varias versiones) y explicamos su relación con $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. En § 5 probaremos el Teorema A'', y también reduciremos el estudio de $\text{GT}(k)$ al estudio de un álgebra de Lie graduada infinito dimensional $\text{grt}_1(k)$.

En § 6 recolectaremos ciertas propiedades de esta álgebra. § 4 es independiente de § 2 y § 3, mientras que § 5 y § 6 son independientes de § 3.

El autor agradece A. A. Beilinson, G. V. Belyi, Yu. I. Manin, y G. B. Shabat por recomendarme los artículos [2], [11],[12],[13],[14], y [15].

2. Construcción de Φ_{KZ}

La manera más sencilla de definir Φ_{KZ} es por la fórmula $\Phi_{KZ} = G_2 G_1^{-1}$ donde G_1 y G_2 son soluciones a la ecuación diferencial

$$G'(x) = \hbar \left(\frac{t^{12}}{x} + \frac{t^{23}}{x-1} \right) G(x), \hbar = h/2\pi i, \quad (2.1)$$

definidas en $0 < x < 1$ y que tienen las asíntotas $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ para $x \rightarrow 0$ y $G_2(x) \sim (1-x)^{\hbar t^{23}}$ para $x \rightarrow 1$. Aquí $t^{12} = t \otimes 1 \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ y $t^{23} = 1 \otimes t \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, donde \mathfrak{g} es un álgebra de Lie por deformación sobre $\mathbb{C}[[\hbar]]$ y el tensor $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es simétrico y \mathfrak{g} -invariante. La función $G : (0, 1) \rightarrow (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ en ecuación (2.1) debe ser analítica; es decir, para cada n la imagen de $G(x)$ en $(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}/\hbar^n (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ debe ser de la forma $\sum_{i=1}^N a_i(x) \cdot u_i$, donde $u_i \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}/\hbar^n (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, las funciones $a_i : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ son analíticas, y en general N depende de n . En el caso más importante, cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0[[\hbar]]$ (es decir, \mathfrak{g} es la deformación trivial de \mathfrak{g}_0), esto significa que $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) \hbar^i$, donde cada g_i es una función analítica con valores en algún subespacio de dimensión finita $V_i \subset (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3}$. Por supuesto $x^{\hbar t^{12}}$ se entiende como $\exp(\hbar \ln x \cdot t^{12}) = 1 + \hbar \ln x \cdot t^{12} + \dots$. La notación $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ significa que $G_1(x) x^{-\hbar t^{12}}$ tiene una continuación analítica en una vecindad del punto $x = 0$ y toma el valor 1 en ese punto. La existencia y unicidad de G_1 y G_2 se prueban sin dificultad.

El sistema KZ tiene la forma

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot W, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

donde $W(z_1, \dots, z_n) \in (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$ y t^{ij} es la imagen de t bajo el (i, j) -ésimo encaje $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \rightarrow (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$. Para nosotros es esencial que, tal como se indica en [10], el sistema (2.2) es auto-consistente; es decir, la curvatura de la conexión correspondiente es 0. Dado que $\partial W/\partial z_1 + \dots + \partial W/\partial z_n = 0$, la función W depende solamente de las diferencias

$z_i - z_j$. Más aún, $\sum_i z_i \partial W / \partial z_i = \hbar \sum_{i < j} t^{ij} W$, así que (2.2) se reduce a un sistema de ecuaciones en función de $n - 2$ variables. En particular, para $n = 3$ las soluciones de (2.2) son de la forma $(z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{23})} \cdot G((z_2 - z_1)/(z_3 - z_1))$, donde G cumple (2.1). Por lo tanto Φ_{KZ} puede determinarse por la relación $W_1 = W_2 \cdot \Phi_{KZ}$ donde W_1 y W_2 son soluciones de (2.2) para $n = 3$ en la región

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 < z_2 < z_3\}$$

con la asíntota $W_1 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{23})}$ para $z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1$, y $W_2 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13})}$ para $z_3 - z_2 \ll z_3 - z_1$.

La definición de Φ en términos del sistema (2.2) es conveniente, en particular, para verificar (1.2) y (1.6a) (1.6b) (la igualdad (1.1) es obviamente equivalente a la \mathfrak{g} -invarianza de Φ_{KZ}). Para probar (1.6a) (1.6b), consideramos (2.2) para $n = 4$ en la región

$\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 \mid z_1 < z_2 < z_3 < z_4\}$ y distinguimos cinco zonas:

- 1) $z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1$, 2) $z_3 - z_2 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1$,
- 3) $z_3 - z_2 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1$, 4) $z_4 - z_3 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1$,
- 5) $z_2 - z_1 \ll z_4 - z_1, z_4 - z_3 \ll z_4 - z_1$.

Estas zonas corresponden a los "vértices" del pentágono (1.7) de acuerdo a la siguiente regla: si V_i y V_j están dentro del paréntesis y V_k esta afuera de los paréntesis, entonces $|z_i - z_j| \ll |z_i - z_k|$; por ejemplo, $(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4$ corresponde a la segunda zona.

Lema. Existen soluciones únicas W_1, \dots, W_5 del sistema (2.2) con el siguiente comportamiento asintótico en la respectiva zona:

$$\begin{aligned} W_1 &\sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{23})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}, \\ W_2 &\sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}, \\ W_3 &\sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_4 - z_2)^{\hbar(t^{24}+t^{34})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{14})}, \\ W_4 &\sim (z_4 - z_3)^{\hbar t^{34}} (z_4 - z_2)^{\hbar(t^{23}+t^{24})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{14})}, \\ W_5 &\sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_4 - z_3)^{\hbar t^{34}} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})}. \end{aligned}$$

Se debe entender que, por ejemplo, para W_5 esto significa que

$$W_5 = f(u, v) (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_4 - z_3)^{\hbar t^{34}} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})},$$

con $u = (z_2 - z_1)/(z_4 - z_1)$, $v = (z_4 - z_3)/(z_4 - z_1)$, f analítica en una vecindad de $(0, 0)$, y $f(0, 0) = 1$.

Demostración. Consideremos, por decir, la quinta zona.

Con la substitución $W = g(u, v)(z_4 - z_1)^{\hbar T}$, siendo $T = t^{12} + t^{13} + t^{14} + t^{23} + t^{24} + t^{34}$, $u = (z_2 - z_1)/(z_4 - z_1)$, y $v = (z_4 - z_3)/(z_4 - z_1)$. Obtenemos para g un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u} &= h\left(\frac{A}{u} + R(u, v)\right) \cdot g(u, v), \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= h\left(\frac{B}{v} + S(u, v)\right) \cdot g(u, v),\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde las funciones R y S , con valores en $(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, son analíticas en una vecindad de $(0, 0)$, mientras que $A, B \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ no dependen de u ni v (es de notar que $[A, B] = 0$, en vista de la integrabilidad de la conexión ∇ correspondiente a (2.3)). Debemos probar existencia y unicidad de la solución al sistema (2.3) de la forma $\varphi(u, v)u^{\hbar A}v^{\hbar B}$, donde $\varphi(u, v)$ es analítica en una vecindad de $(0, 0)$ y $\varphi(0, 0) = 1$. En otras palabras, debemos probar existencia y unicidad de una función analítica $\varphi(u, v)$ tal que $\varphi(0, 0) = 1$, $\varphi^{-1} \cdot \nabla_v \cdot \varphi = \partial/\partial u - \hbar Au^{-1}$, y $\varphi^{-1} \cdot \nabla_u \cdot \varphi = \partial/\partial v - \hbar Bv^{-1}$, donde $\nabla_u = \partial/\partial u - \hbar(Au^{-1} + R(u, v))$ y $\nabla_v = \partial/\partial v - \hbar(Bv^{-1} + S(u, v))$. Esto se puede hacer por el método de aproximaciones sucesivas. \square

Es fácil ver que W_1, \dots, W_5 tienen continuación analítica en la región $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. La fórmula (1.2) se sigue de las identidades $W_1 = W_2 \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1)$, $W_2 = W_3 \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi_{KZ})$, $W_3 = W_4 \cdot (1 \otimes \Phi_{KZ})$, $W_4 = W_5 \cdot (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi_{KZ})$, y $W_5 = W_4 \cdot (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi_{KZ})$. Mostraremos como probar las primeras dos.

Sea $V_1 = W_1 \cdot (z_4 - z_1)^{-\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})}$ y

$$\begin{aligned}V_2 &= W_2 \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1) \cdot (z_4 - z_1)^{-\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})} \\ &= W_2 \cdot (z_4 - z_1)^{-\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})} \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1),\end{aligned}$$

probaremos que $V_1 = V_2$. Es fácil verificar que V_1 y V_2 son analíticas en $z_1 < z_2 < z_3, z_4 \in \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \setminus [z_1, z_3]$ (z_4 puede ser igual a ∞ !). Más aún, ambos V_1 y V_2 satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot V, i = 2, 3,\tag{2.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = \hbar \sum_{j \neq 1} \frac{t^{1j}}{z_1 - z_j} \cdot V - \hbar V \cdot \frac{t^{14} + t^{24} + t^{34}}{z_1 - z_4},\tag{2.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_4} = \hbar \sum_{j \neq 4} \frac{[t^{14}, V]}{z_4 - z_j}.\tag{2.6}$$

De (2.4) y (2.5), y las asíntotas de V_1 y V_2 se sigue que V_1 y V_2 coinciden para $z_4 = \infty$. Esto y (2.6) implican $V_1 = V_2$.

Ahora, sea $U_1 = W_2 \cdot (z_3 - z_2)^{-\hbar t^{23}}$ y

$$\begin{aligned} U_2 &= W_3 \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi_{KZ}) \cdot (z_3 - z_2)^{-\hbar t^{23}} \\ &= W_3 \cdot (z_3 - z_2)^{-\hbar t^{23}} \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi_{KZ}); \end{aligned}$$

mostraremos que $U_1 = U_2$. Es fácil de verificar que U_1 y U_2 son analíticas en

$$z_1 < z_2 < z_4, z_1 < z_3 < z_4,$$

(¡ z_2 puede ser igual a z_3 !). Más aún, ambos U_1 y U_2 satisfacen

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot U, i = 1, 4, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_2} = \hbar \sum_{j \neq 2,3} \frac{t^{2j}}{z_2 - z_j} \cdot U + \hbar \frac{[t^{23}, U]}{z_2 - z_3}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_3} = \hbar \sum_{j \neq 2,3} \frac{t^{3j}}{z_3 - z_j} \cdot U - \hbar \frac{[t^{23}, U]}{z_2 - z_3}. \quad (2.9)$$

Es fácil ver que U_1 y U_2 coinciden para $z_2 = z_3$. De esto y (2.8) se sigue que $U_1 = U_2$. Esto prueba (1.2). Reemplazando x por $1 - x$ en (2.1) obtenemos que Φ_{KZ} satisface

$$\Phi^{321} = \Phi^{-1}. \quad (2.10)$$

Por lo tanto (1.6b) se sigue de (1.6a); basta con aplicar en ambos lados de (1.6a) el operador que intercambia el primer producto tensorial con el tercero, y usar $R^{21} = R$ y $\Delta' = \Delta$. La prueba de (1.6a) se encuentra en § 3 de [1]. Esta usa las seis soluciones del sistema (2.2) para $n = 3$ en el dominio complejo que tiene el comportamiento asintótico estándar en la zonas correspondientes; ellas corresponden a los “vértices” del hexágono (1.9a).

Ahora reemplacemos (2.1) por la ecuación

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \right) G(x), \quad (2.11)$$

donde A y B son símbolos no conmutativos, y G es una serie formal en A y B con coeficientes que son funciones analíticas de x . Consideremos, como arriba, soluciones G_1 y G_2 con las asíntotas estándar para $x = 0$ y $x = 1$. Sea $\varphi_{KZ}(A, B) = G_2^{-1} G_1$. El álgebra $\mathbb{C} \ll A, B \gg$ de series formales no conmutativas es un álgebra de Hopf

topológica con la comultiplicación $\Delta(A) = A \otimes 1 + 1 \otimes A$, $\Delta(B) = B \otimes 1 + 1 \otimes B$. Claramente, $\Delta(\varphi_{KZ}) = \varphi_{KZ} \otimes \varphi_{KZ}$. Por lo tanto $\ln \varphi_{KZ}(A, B)$ es una serie formal de Lie, es decir, un elemento de la completación del álgebra libre de Lie sobre \mathbb{C} con generadores A, B (ver [16], Capítulo II, § 3, Corolario 2, Teorema 1). De la misma forma que por (2.10) uno prueba que φ_{KZ} satisface la igualdad

$$\varphi(B, A) = \varphi(A, B)^{-1}. \quad (2.12)$$

Para obtener análogos de (1.2) y de (1.6a) para φ_{KZ} , observe que tal como en [7], la integrabilidad de la conexión correspondiente a (2.2) se sigue de las relaciones $t^{ij} = t^{ji}$ y $[t^{ij}, t^{kl}] = 0$ para $i \neq j \neq k \neq l$, y $[t^{ij} + t^{ik}, t^{jk}] = 0$ para $i \neq j \neq k$. Ahora definimos, tal como en [17], el álgebra de Lie $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ como el cociente de la completación del álgebra libre de Lie sobre \mathbb{C} con generadores \tilde{X}^{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$, módulo el ideal generado topológicamente por los elementos de los tres tipos siguientes 1) $\tilde{X}^{ij} - \tilde{X}^{ji}$; 2) $[\tilde{X}^{ij}, \tilde{X}^{kl}]$, $i \neq j \neq k \neq l$; 3) $[\tilde{X}^{ij} + \tilde{X}^{ik}, \tilde{X}^{jk}]$, $i \neq j \neq k$. La imagen de \tilde{X}^{ij} en $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ es denotada por X^{ij} . Reemplazamos ht^{ij} en (2.2) por X^{ij} , encontraremos que los mismos argumentos que prueban (1.2) y (1.6a) para $\Phi = \Phi_{KZ}$ también prueban que φ_{KZ} satisface las relaciones:

$$\begin{aligned} & \varphi(X^{12}, X^{23} + X^{24}) \cdot \varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34}) \\ & = \varphi(X^{23}, X^{34}) \cdot \varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34}) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \exp((X^{13} + X^{23})/2) &= \varphi(X^{13}, X^{12}) \cdot \exp(X^{13}/2) \cdot \varphi(X^{13}, X^{23})^{-1} \\ & \cdot \exp(X^{23}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23}), \end{aligned} \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} \exp((X^{12} + X^{13})/2) &= \varphi(X^{23}, X^{13})^{-1} \cdot \exp(X^{13}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{13}) \\ & \cdot \exp(X^{12}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1}, \end{aligned} \quad (2.14b)$$

donde ambos lados de (2.13) pertenecen a $\exp \mathfrak{a}_4^{\mathbb{C}}$ mientras que ambos lados de (2.14a) y (2.14b) pertenecen a $\exp \mathfrak{a}_3^{\mathbb{C}}$. Denotamos $\exp \mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}} = \{e^x | x \in \mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}\}$, donde e^x se entiende como un elemento de la completación del álgebra universal envolvente $U\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$. En otras palabras, $\exp \mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ es el grupo de Lie correspondiente a $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$.

Si asumimos por un momento que $[A, B] = 0$, entonces (2.11) tiene la solución $x^{A/2\pi i}(1-x)^{B/2\pi i}$ con ambas asíntotas estándar en $x = 0$ y $x = 1$. Por lo tanto $\ln \varphi_{KZ} \in \mathfrak{p}$ donde \mathfrak{p} es el conmutador de la completación del álgebra libre de Lie con generadores A, B . Busquemos la imagen de $\ln \varphi_{KZ} \in \mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Dado que \mathfrak{p} es un álgebra libre topológica de Lie con generadores $U_{kl} = (\text{ad}B)^l(\text{ad}A)^k[A, B]$ (vea por ejemplo 2.4.2 de [18]), las imágenes de U_{kl} en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ (que denotaremos por \bar{U}_{kl}) forman una base topológica en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Observe que \bar{U}_{kl} también es la imagen de $(\text{ad}A)^k(\text{ad}B)^l[A, B]$

en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Los coeficientes de la expansión de la imagen de $\ln \varphi_{KZ}$ en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, con respecto a la base \bar{U}_{kl} serán denotados por c_{kl} . Mostraremos que

$$1 + \sum_{k,l} c_{kl} u^{k+1} v^{l+1} = \exp \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n(2\pi i)^n} (u^n + v^n - (u+v)^n). \quad (2.15)$$

Escribamos las soluciones estándar G_1 y G_2 de la ecuación (2.11) en la forma $G_j(x) = x^{\bar{A}}(1-x)^{\bar{B}} V_j(x)$, con $\bar{A} = A/2\pi i$, $\bar{B} = B/2\pi i$. Las funciones V_j tienen extensiones continuas a $[0, 1]$ y satisface la ecuación

$$V'(x) = Q(x)V(x), \quad (2.16)$$

$$Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\ln(1-x) \cdot ad\bar{B}} \cdot \frac{e^{-\ln x \cdot ad\bar{A}} - 1}{x-1} \bar{B} \in \mathfrak{p}.$$

Más aún, $V_1(0) = 1$ y $V_2(1) = 1$. Por lo cual $\varphi_{KZ} = V_2^{-1}V_1 = V(1)V(0)^{-1}$, donde V es cualquier solución de (2.16). Esto significa que la imagen de $\ln \varphi_{KZ}$ en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ es igual a $\int_0^1 \bar{Q}(x) dx$, donde $\bar{Q}(x)$ es la imagen de $Q(x)$ en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Entonces,

$$c_{kl} = \frac{1}{(2\pi i)^{k+l+2} (k+1)! l!} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^l \frac{dx}{x-1}. \quad (2.17)$$

Suponiendo que $u, v \in \mathbb{C}$, $\text{im } v < 0$, $\text{im } u < 2\pi$, encontramos que el lado izquierdo de (2.15) es igual a

$$\begin{aligned} 1 + \bar{v} \int_0^1 (1-x^{-\bar{u}})(1-x)^{-\bar{v}-1} dx &= -\bar{v} \int_0^1 (x^{-\bar{u}})(1-x)^{-\bar{v}-1} dx \\ &= \Gamma(1-\bar{u})\Gamma(1-\bar{v})/\Gamma(1-\bar{u}-\bar{v}), \end{aligned}$$

con $\bar{u} = u/2\pi i$ y $\bar{v} = v/2\pi i$. Usando la fórmula $\ln \Gamma(1-z) = \gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n)/n) \cdot z^n$, que se sigue de la expansión de la función Γ como un producto infinito ([19] capítulo 12), obtenemos (2.15). De (2.15) se sigue en particular que

$$c_{k,0} = c_{0,k} = -\zeta(k+2)/(2\pi i)^{k+2}. \quad (2.18)$$

Uno podría dar una prueba diferente de (2.18): $c_{k,0}$ pueden ser calculados usando (2.17), la fórmula $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\dots$ y la substitución $x = e^{-y}$, y $c_{0,k}$ por la fórmula $c_{ij} = c_{ji}$, que es consecuencia de (2.12).

Nota: De acuerdo a la introducción de [11], cálculos semejantes fueron hechos previamente por Z. Wojtkowiak; de hecho, ellos motivaron a Deligne.

3. Prueba de los teoremas A , A' y B .

En esta sección examinaremos las álgebras quasitriangulares quasi-Hopf EUC sobre $k[[h]]$, donde k es un campo de característica 0. Recordemos (ver proposición 3.5 de [1]) que a) cualquiera de esas álgebras puede convertirse usando una torsión apropiada en la forma simétrica (es decir, podemos hacer $R^{21} = R$); 2) torciendo con F preserva la forma simétrica si y solo si $F^{21} = F$; 3) si $R^{21} = R$, entonces $\Delta' = \Delta$ y (2.10) se satisface. Recordemos también (ver § 2) que si $R^{21} = R$, entonces (1.6b) se sigue de (1.6a) y (2.10).

Sea \mathfrak{g} álgebra de Lie sobre k , y $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ simétrico e invariante bajo \mathfrak{g} . Denotamos $A = (U\mathfrak{g})[[h]]$ y definimos como es usual $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ y $\varepsilon : A \rightarrow k[[h]]$. Buscamos elementos \mathfrak{g} -invariantes $R \in A \otimes A$ y $\Phi \in A \otimes A \otimes A$ tales que $R^{21} = R$, $R \equiv 1 + ht/2$ mód h^2 , $\Phi \equiv 1$ mód h y se satisfacen las ecuaciones (1.2), (1.4), (1.6a), y (2.10) (¡no requerimos que $R = e^{ht/2}$!).

Proposición 3.1. *Tales R, Φ existen.*

Demostración. Supongamos que hemos construido elementos \mathfrak{g} -invariantes $R_n \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ y $\Phi_n \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ tales que $R_n^{21} = R_n$, $R_n \equiv 1 + ht/2$ mód h^2 , $\Phi_n \equiv 1$ mód h , y $R_n \cdot \Phi_n$ satisfacen modulo h^n las ecuaciones (1.2), (1.4), (1.6a) y (2.10) (para $n = 2$ podemos poner $R_2 = 1 + ht/2$, $\Phi_2 = 1$). De la prueba de [1, Proposición 3.10] se sigue que existe un \mathfrak{g} -invariante $\bar{\Phi}_n \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ que satisface (1.2), (1.4) y (2.10) modulo h^{n+1} tal que $\bar{\Phi}_n \equiv \Phi_n$ mód h^n . Dado que R_n y $\bar{\Phi}_n$ satisfacen (1.6a) modulo h^n , tenemos

$$(\Delta \otimes \text{id})(R_n) \equiv \bar{\Phi}_n^{312} R_n^{13} (\bar{\Phi}_n^{132})^{-1} R_n^{23} \bar{\Phi}_n + h^n \psi \quad \text{mód } h^{n+1}, \quad (3.1a)$$

donde $\psi \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ es \mathfrak{g} -invariante. Usando en ambos lados de (3.1a) el operador que intercambia el primer y el tercer factor tensorial, obtenemos:

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R_n) \equiv (\bar{\Phi}_n^{231})^{-1} R_n^{13} \bar{\Phi}_n^{213} R_n^{12} \bar{\Phi}_n^{-1} + h^n \psi^{321} \quad \text{mód } h^{n+1}. \quad (3.1b)$$

Buscamos R_{n+1} y Φ_{n+1} de la forma $R_{n+1} = R_n + h^n r$ y $\bar{\Phi}_{n+1} = \bar{\Phi}_n + h^n \varphi$, con $r \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ y $\varphi \in \wedge^3 \mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. Los elementos r y φ deben ser \mathfrak{g} -invariantes y satisfacer las ecuaciones

$$r^{21} = r, \quad (3.2)$$

$$r^{13} + r^{23} - (\Delta \otimes \text{id})(r) + 3\varphi = \psi. \quad (3.3)$$

Para que tales r, φ existan, es necesario que

$$\psi^{234} - (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\psi) + (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\psi) - \psi^{124} = 0, \quad (3.4)$$

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\psi) - \psi^{123} - \psi^{124} = (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\psi^{321}) - \psi^{431} - \psi^{432}, \quad (3.5)$$

$$\alpha^{321} = -\alpha, \quad (3.6)$$

donde $\alpha = \psi - \psi^{213}$. Aseguramos que (3.4)-(3.6) también son suficientes para la existencia de r y de φ . Pues, (3.4) dice que ψ es un 2-cociclo en el complejo $C^*(\mathfrak{g}) \otimes U\mathfrak{g}$, donde

$$\begin{aligned} C^n(\mathfrak{g}) &= (U\mathfrak{g})^{\otimes n}, \\ d(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{i=1}^n a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Se sigue de [1, Proposición 2.2] que $\alpha \in \wedge^2 \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, mientras que $\phi - \alpha/2$ es una cofrontera, es decir

$$\psi - \alpha/2 = \bar{r}^{13} + \bar{r}^{23} - (\Delta \otimes \text{id})(\bar{r}). \quad (3.8)$$

Aquí \bar{r} se puede elegir \mathfrak{g} -invariante; basta que bajo la identificación usual de $U\mathfrak{g}$ con $\text{Sym}^* \mathfrak{g}$ (ver [16, Capítulo II, §1, Proposición 9]) \bar{r} sea enviado a un elemento de $\text{Sym}^* \mathfrak{g} \otimes \text{Sym}^* \mathfrak{g}$ cuya imagen en $\mathfrak{g} \otimes \text{Sym}^* \mathfrak{g}$ sea 0. Dado que $\alpha \in \wedge^2 \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, se sigue de (3.6) que $\alpha \in \wedge^3 \mathfrak{g}$. Sea $\varphi = \alpha/6$. Entonces (3.2) y (3.3) equivalen a las siguientes condiciones en $s = r - \bar{r}$:

$$s - s^{21} = \bar{r}^{21} - \bar{r}, s \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}. \quad (3.9)$$

Para la existencia de s que satisfaga (3.9) es necesario y suficiente que $\bar{r}^{21} - \bar{r} \in (\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}) \oplus (U\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$, es decir, que

$$(f \otimes f)(\bar{r}^{21} - \bar{r}) = 0, \quad (3.10)$$

donde $f : U\mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, $f(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a - \Delta(a)$. Si (3.10) se cumple, entonces s se puede elegir \mathfrak{g} -invariante; basta que la imagen de $s + \bar{r}$ en $\text{Sym}^* \mathfrak{g} \otimes \text{Sym}^* \mathfrak{g}$ no tenga componentes en $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Observemos que (3.10) se sigue de (3.5), (3.8), y de que $\alpha \in \wedge^3 \mathfrak{g}$.

Ahora probamos (3.4)-(3.6). Usando (3.1a) para transformar ambos lados de la igualdad

$$\bar{\Phi}_n^{123} \cdot (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})(R_n) = (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})(R_n) \cdot \bar{\Phi}_n^{123}$$

y usando (1.2) y (1.5), obtenemos (3.4). Ahora expresamos $(\Delta \otimes \Delta)(R_n)$ en términos de $R_n^{13}, R_n^{14}, R_n^{23}, R_n^{24}$ en dos formas posibles (podemos usar primero (3.1a) y luego (3.1b), o primero (3.1b) y luego (3.1a)). Comparando las dos expresiones de $(\Delta \otimes \Delta)(R_n)$ y usando (1.2) y (1.5), obtenemos (3.5). De la misma forma que en la prueba de la fórmula 3.12 de [1], que generaliza la relación de Yang-Baxter, podemos derivar de (3.1a) la congruencia

$$R_n^{12} \bar{\Phi}_n^{312} R_n^{13} (\bar{\Phi}_n^{132})^{-1} R_n^{23} \bar{\Phi}_n + h^n \alpha \equiv \bar{\Phi}_n^{321} R_n^{23} (\bar{\Phi}_n^{231})^{-1} R_n^{13} \bar{\Phi}_n^{213} R^{12} \pmod{h^{n+1}}. \quad (3.11)$$

Usando en ambos lados de (3.11) el operador que intercambia el primer tensor y el tercero, y usando las relaciones $R_n^{21} = R_n$ y $\bar{\Phi}_n^{321} \equiv \bar{\Phi}_n^{-1} \pmod{h^{n+1}}$, obtenemos (3.6). □

La prueba de la proposición 3.1 determina específicamente ciertos elementos Φ y R , en términos de $\tau = ht$ por medio de formulas \mathbb{Q} -universales $\Phi = \mathcal{M}(\tau)$ y $R = \mathcal{N}(\tau)$. Respecto a esas formulas nos basta con saber que $\mathcal{M}(\tau) = 1 + O(\tau)$ y $\mathcal{N}(\tau) = 1 + \tau/2 = o(\tau)$, donde $o(\tau)$ (respectivamente $O(\tau)$) denota términos en τ de grado mayor que 1 (respectivamente mayores o igual que 1).

Proposición 3.2. Sea \mathfrak{g} álgebra de Lie sobre k , y supongamos que $R \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ y $\Phi \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ son invertibles, \mathfrak{g} -invariantes, y satisfacen (1.2), (1.4), y (1.6). Entonces, torciendo vía un $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ \mathfrak{g} -invariante, los elementos Φ y R se convierten en $\mathcal{M}(h\theta)$ y $\mathcal{N}(h\theta)$, donde θ es un elemento \mathfrak{g} -invariante de $(\text{Sym}^2 \mathfrak{g})[[h]]$. Más aún, θ es único, mientras que F es determinado hasta por multiplicación por un elemento de la forma $(u^{-1} \otimes u^{-1})\Delta(u)$, donde u pertenece al centro de $(U\mathfrak{g})[[h]]$ y $u \equiv 1 \pmod{h}$, $\varepsilon(u) = 1$.

Demostración. $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ se pueden torcer en forma simétrica por un elemento \mathfrak{g} -invariante de $(U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ (ver prueba de la proposición 3.5 en [1]). Por lo tanto podemos asumir $R^{21} = R$ (en cuyo caso $\Phi^{321} = \Phi^{-1}$ y F debe ser simétrico). Así que todo se reduce al siguiente lema. □

Lema. Supongamos que (Φ_1, R_1) y (Φ_2, R_2) satisfacen las condiciones de la proposición, con $R_1^{21} = R_1, R_2^{21} = R_2, \Phi_1 \equiv \Phi_2 \pmod{h^n}$, y $R_1 \equiv R_2 \pmod{h^n}$. Sea φ y r los residuos \pmod{h} de los elementos $h^{-n}(\Phi_1 - \Phi_2)$ y $h^{-n}(R_1 - R_2)$, respectivamente. Entonces r es un elemento \mathfrak{g} -invariante de $\text{Sym}^2 \mathfrak{g}$, mientras φ puede ser escrito de la forma

$$\varphi = f^{23} - (\Delta \otimes id)(f) + (id \otimes \Delta)(f) - f^{12}, \quad (3.12)$$

donde f es un elemento \mathfrak{g} -invariante simétrico de $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ tal que $(\varepsilon \otimes \text{id})(f) = 0 = (\text{id} \otimes \varepsilon)(f)$. Más aún, f está determinado de manera única hasta por un elemento vía

$$\tilde{f} = f + \Delta(v) - v \otimes 1 - 1 \otimes v, \quad (3.13)$$

con v en el centro de $U\mathfrak{g}$ y $\varepsilon(v) = 0$

Demostración. Dado que R_1 y R_2 satisfacen (1.6a), mientras que Φ_1 y Φ_2 satisfacen (2.10), tenemos $(\Delta \otimes \text{id})(r) - r^{13} - r^{23} = \text{Alt}\varphi/2$. El lado izquierdo de esta igualdad es simétrico en los primeros factores tensoriales, y el lado derecho es anti-simétrico. Así que ambos son 0; es decir $\text{Alt}\varphi = 0$ y $r \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. De $r \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ y $r^{21} = r$, se sigue que $r \in \text{Sym}^2\mathfrak{g}$. Como φ_1 y φ_2 satisfacen (1.2),(1.4), y (2.10), tenemos

$$\begin{aligned} \varphi^{234} - (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\varphi) + (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\varphi) \\ - (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\varphi) + \varphi^{123} = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\varphi) = 0, \quad (3.15)$$

$$\varphi^{321} = -\varphi. \quad (3.16)$$

Usando en (3.14) las funciones $\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \text{id}$ y $\text{id} \otimes \text{id} \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon$, y usando (3.15), obtenemos:

$$(\varepsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\varphi) = 0 = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \varepsilon)(\varphi). \quad (3.17)$$

(3.14) dice que φ es un 3-cociclo en el complejo (3.7). De la proposición 3.11 de [1], si tal ciclo es \mathfrak{g} -invariante y satisface (3.15)-(3.17) y la condición $\text{Alt}\varphi = 0$, entonces se puede representar en la forma (3.12), y la representación es única hasta por sustitución en la forma (3.13). □

Sea \mathcal{M} y \mathcal{N} como arriba. De la misma manera que probamos Proposición 3.2 uno prueba lo siguiente.

Proposición 3.3. Sea $(\overline{\mathcal{M}}(\tau), \overline{\mathcal{N}}(\tau))$ soluciones arbitrarias k -universales de las ecuaciones (1.2),(1.4), y (1.6a) tales que $\overline{\mathcal{N}}(\tau)$ es simétrico, $\overline{\mathcal{N}}(\tau) = 1 + \tau/2 + o(\tau)$. Entonces torciendo vía un $F(\tau)$ k -universal simétrico uno puede convertir $(\overline{\mathcal{M}}(\tau), \overline{\mathcal{N}}(\tau))$ en $(\mathcal{M}(\tilde{\tau}), \mathcal{N}(\tilde{\tau}))$, donde $\tilde{\tau}$ se expresa en términos de τ por una fórmula del tipo $\tilde{\tau} = \tau + O(\tau)$. Más aún, $\tilde{\tau}$ está determinada por $(\overline{\mathcal{M}}, \overline{\mathcal{N}})$ de manera única, y $F(\tau)$ hasta por multiplicación por $(u^{-1} \otimes u^{-1}) \cdot \Delta(u)$, donde u se expresa en términos de τ por una fórmula k -universal de la forma $u = 1 + O(\tau)$.

Proposición 3.4. Sea $(\overline{\mathcal{M}}(\tau), \overline{\mathcal{N}}(\tau))$ tal como en Proposición 3.3. Entonces $\overline{\mathcal{N}}(\tau) = e^{\tau/2}$, donde $\tilde{\tau}$ se expresa en términos de τ mediante una fórmula k -universal de la forma $\tilde{\tau} = \tau + o(\tau)$.

Demostración. Si $R = e^{ht}$, donde $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es simétrico y \mathfrak{g} -invariante, y $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U \otimes \mathfrak{g})[[\hbar]]$ también es simétrico y \mathfrak{g} -invariante, entonces en la fórmula (1.12) $\tilde{R} = R$, pues $[t, F] = 0$ (basta usar la fórmula $t = (\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)/2$, donde $C \in U\mathfrak{g}$ es el elemento de Casimir correspondiente a t). La versión k -universal es también cierta: $F(\tau)e^{\tau/2}F(\tau)^{-1} = e^{\tau/2}$ para todo $F(\tau)$ k -universal. Por lo tanto, usando Proposición 3.3 al caso $\overline{\mathcal{N}}(\tau) = e^{\tau/2}$ y $\overline{\mathcal{M}}(\tau)$ definido por el sistema KZ (ver § 2), encontramos que $\mathcal{N}(\tilde{\tau}) = e^{\tau/2}$ para algún $\tilde{\tau}$ de la forma $\tau + o(\tau)$. Queda por usar Proposición 3.3 a un par arbitrario $(\overline{\mathcal{M}}(\tau), \overline{\mathcal{N}}(\tau))$. \square

Prueba del Teorema A'. En el proceso de probar Proposición 3.1 construimos elementos \mathbb{Q} -universales $\Phi = \mathcal{M}(\tau)$ y $R = \mathcal{N}(\tau)$ que satisfacen (1.1)-(1.6) y la condición $R^{21} = R$, con $\mathcal{N}(\tau) = 1 + \tau/2 = o(\tau)$ y $\mathcal{M}(\tau) = 1 + O(\tau)$. De la proposición 3.4 se sigue que existe un $\tilde{\tau}$ \mathbb{Q} -universal de la forma $\tau + o(\tau)$ tal que $\mathcal{N}(\tilde{\tau}) = e^{\tau/2}$. Así que $\Phi = \mathcal{M}(\tilde{\tau})$ y $R = e^{\tau/2}$ satisfacen (1.1)-(1.6). Unicidad del Teorema A' se sigue de la proposición 3.3. \square

Teorema A' implica la existencia en el Teorema A. Unicidad es una consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Sea \mathfrak{g} un álgebra por deformación sobre $k[[\hbar]]$ (ver § 1), y $R \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ y $\Phi \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ elementos invertibles \mathfrak{g} -invariantes que satisfacen (1.2), (1.4) y (1.6a). Entonces torsionando vía un \mathfrak{g} -invariante $F \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ podemos convertir Φ y R en $\mathcal{M}(h\theta)$ y $e^{h\theta/2}$, donde θ es un elemento \mathfrak{g} -invariante de $\text{Sym}^2\mathfrak{g}$. Más aún, F está determinado únicamente hasta por multiplicación por un elemento de la forma $(u^{-1} \otimes u^{-1}) \times \Delta(u)$, donde u pertenece al centro de $U\mathfrak{g}$ y $u \equiv 1 \pmod{\hbar}$, $\varepsilon(u) = 1$.*

Demostración. La prueba es básicamente como la prueba anterior (ver Proposición (3.2)) en el caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0[[\hbar]]$, donde \mathfrak{g}_0 es un álgebra de Lie sobre k . Se diferencia en el siguiente punto. Supongamos $R^{21} = R$, $\Phi \equiv \mathcal{M}(h\theta_n) \pmod{\hbar^n}$, y $R \equiv e^{h\theta_n/2} \pmod{\hbar^n}$ para algún \mathfrak{g} -invariante $\theta_n \in \text{Sym}^2\mathfrak{g}$. Sea r y φ las clases residuales $\pmod{\hbar}$ de los elementos $h^{-n}(R - e^{h\theta_n/2})$ y $h^{-n}(\Phi - \mathcal{M}(h\theta))$, respectivamente. Tal y como en la prueba de la Proposición 3.2, uno muestra que r es un elemento invariante de $\text{Sym}^2\mathfrak{g}_0$, donde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}/\hbar\mathfrak{g}$, mientras que φ puede ser representado de la forma (3.12), donde f es un elemento simétrico invariante de $U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0$ tal que $(\varepsilon \otimes \text{id})(f) = (\text{id} \otimes \varepsilon)(f) = 0$. Pero para poder construir elementos \mathfrak{g} -invariantes simétricos $F_n \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ y $\theta_{n+1} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ tales que $\tilde{\Phi} \equiv \mathcal{M}(h\theta_{n+1}) \pmod{\hbar^{n+1}}$ y $\tilde{R} \equiv \exp(h\theta_{n+1}/2) \pmod{\hbar^{n+1}}$, donde $\tilde{\Phi}$ y \tilde{R} son obtenidos bajo torsión de Φ y R vía F_n , aún debemos probar que $r \in \text{Sym}^2\mathfrak{g}_0$ se extiende a un elemento invariante $\underline{r} \in \text{Sym}^2\mathfrak{g}$, mientras que $f \in \text{Sym}^2(U\mathfrak{g}_0)$ puede ser elegido de manera que se extiende en un elemento invariante $\underline{f} \in \text{Sym}^2(U\mathfrak{g})$. Para \underline{r} podemos tomar $\pi(h^{-n}(\ln R - \theta/2))$, donde $\pi : U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es la proyección definida por la identificación de $U\mathfrak{g}$ con $\text{Sym}^*\mathfrak{g}$ (estamos obligados a usar

π , pues aún no hemos probado que $\ln R \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$). Afirmamos que f existe si f fue construido tal y como en la prueba de la Proposición 3.11 de [1]. En efecto, si identificamos $U\mathfrak{g}_0$ con $\text{Sym}^*\mathfrak{g}_0$ de la manera usual, entonces $U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0$ se identifica con $\text{Sym}^*(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0) = \bigoplus_m \mathfrak{g}_0^{\otimes m} \otimes_{S_m} (\mathbb{Q}^2)^{\otimes m}$, $(U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3}$ con $\bigoplus_m \mathfrak{g}_0^{\otimes m} \otimes_{S_m} (\mathbb{Q}^3)^{\otimes m}$, y el f construido en [1] es igual a $L_0(\varphi)$, donde $L_0 : (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3} \rightarrow (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 2}$ se define en términos de ciertos operadores S_m -equivariantes $\delta_m : (\mathbb{Q}^3)^{\otimes m} \rightarrow (\mathbb{Q}^2)^{\otimes m}$. Por lo tanto podemos poner $\underline{f} = L(\varphi)$, donde $\varphi = h^{-n}(\Phi - \mathcal{M}(h\theta))$, y $L : (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3} \rightarrow (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 2}$ se define en términos del mismo δ_m .

Un problema similar surge al probar la unicidad de F hasta por multiplicación por $(u^{-1} \otimes u^{-1})\Delta(u)$, y se resuelve de la misma forma. □

Corolario 1. *Bajo las condiciones de la Proposición 3.5, $R^{21}R = e^{h\theta}$, donde θ es un elemento \mathfrak{g} -invariante de $\text{Sym}^2\mathfrak{g}$. En particular, si $R^{21} = R$ entonces $R = e^{h\theta/2}$.*

Nota. 1) *El corolario muestra que si A es un álgebra envolvente universal con el Δ y el ε usual, entonces (1.1)-(1.6b) implican la igualdad $(\Delta \otimes id)(\ln(R^{21}R)) = \ln(R^{31}R^{13}) + \ln(R^{32}R^{23})$. El autor no ha sido capaz de deducir esta igualdad directamente de (1.1)-(1.6a).*

2) *Una prueba similar a la Proposición 3.5 se puede hacer por una proposición análoga respecto álgebras cuasi-Hopf EUC cofronteras en el sentido de 3 de [1].*

Prueba del Teorema B. Sea $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ un álgebra cuasi-Hopf cuasitriangular EUC sobre $k[[\hbar]]$. Sea $\tilde{R} = R \cdot (R^{21}R)^{-1/2}$. De la proposición 3.3 de [1], $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, \tilde{R})$ es una álgebra cuasi-Hopf EUC co-frontera. Por lo tanto, de la proposición 3.13 de [1], una torción adecuada transforma (A, Δ, ε) en $U\mathfrak{g}$ con la comultiplicación y la counidad usuales, donde \mathfrak{g} es una álgebra de Lie por deformación. Ahora usa la proposición 3.5. □

Notas. 1) *Teorema B se puede probar sin el uso de la Proposición 3.5 argumentando tal y como en la prueba de la Proposición 3.13 de [1].*

2) *Se puede hacer una sencilla descripción de la categoría de álgebras cuasi-Hopf cuasitriangular EUC (Proposición 3.14 de [1] y la prueba sigue siendo válida en el caso cuasitriangular).*

4. El Grupo de Grothendieck-Teichmüller

Supongamos dada una categoría quasitensorial (ver § 1), es decir, una categoría C , un functor \otimes , isomorfismos de conmutatividad y asociatividad, además de un objeto identidad k con isomorfismos $V \otimes k \xrightarrow{\sim} V$ y $k \otimes V \xrightarrow{\sim} V$ para todos los objetos

$V \in \mathcal{C}$ (con diagramas conmutativos (1.7)-(1.9)). Trataremos de cambiar los isomorfismos de conmutatividad y asociatividad sin modificar el resto de la estructura que aparece en la definición de categoría quasitensorial. Modificar el isomorfismo de asociatividad $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ equivale a multiplicarlo por un automorfismo de $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Observe que en $(V \otimes V) \otimes V$, donde V es un objeto de \mathcal{C} , existe una acción del grupo de cuerdas B_3 : el generador $\sigma_1 \in B_3$ determina el isomorfismo $c \otimes \text{id}$, donde c es el isomorfismo de conmutación $V \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes V$, y el generador $\sigma_2 \in B_3$ determina el isomorfismo $a^{-1}(\text{id} \otimes c)a$, donde a es el isomorfismo de asociación $(V \otimes V) \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes (V \otimes V)$. De la misma manera, cada $\alpha \in B_3$ determina un isomorfismo $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} (V_{i_1} \otimes V_{i_2}) \otimes V_{i_3}$, donde (i_1, i_2, i_3) es la permutación correspondiente a α^{-1} . Tenemos por lo tanto en $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ una acción del grupo de trenzas coloreadas $K_3 = \text{Ker}(B_3 \rightarrow S_3)$. Así, una elección de $\varphi \in K_3$ determina un nuevo isomorfismo de asociación. Similarmente, una elección de $\psi \in K_2$ determina un nuevo isomorfismo de conmutación. Cada $\psi \in K_2$ es de la forma $\psi = \sigma^{2m}$, donde σ es el generador de B_2 y $m \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto cambiar el isomorfismo de conmutación equivale a elevarlo a la potencia $\lambda = 2m + 1$. Cada $\varphi \in K_3$ es de la forma $f(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \cdot (\sigma_1 \sigma_2)^{3n}$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $f(X, Y)$ es un elemento del grupo libre con generadores X, Y (notemos que $(\sigma_1 \sigma_2)^3 = (\sigma_2 \sigma_1)^3$ genera el centro de B_3). Para isomorfismos nuevos de conmutación y asociación los diagramas de la forma (1.8) siguen siendo conmutativos, pero el pedir que (1.7), (1.9a) y (1.9b) sigan siendo conmutativos requiere condiciones en f, λ y n . Conmutatividad de (1.9a) impone la condición $n = 0$ y la relación

$$f(X_1, X_2)X_1^m f(X_3, X_1)X_3^m f(X_3, X_2)^{-1}X_2^m = 1$$

$$\text{for } X_1 X_2 X_3 = 1, m = (\lambda - 1)/2. \quad (4.1)$$

Conmutatividad de (1.9b) también impone la condición $n = 0$ y la relación

$$f(X_2, X_1)^{-1}X_1^m f(X_3, X_1)X_3^m f(X_3, X_2)^{-1}X_2^m = 1$$

$$\text{for } X_1 X_2 X_3 = 1, m = (\lambda - 1)/2. \quad (4.2)$$

(4.1) y (4.2) equivalen a

$$f(Y, X) = f(X, Y)^{-1}, \quad (4.3)$$

$$f(X_3, X_1)X_3^m f(X_2, X_3)X_2^m f(X_1, X_2)X_1^m = 1$$

$$\text{for } X_1 X_2 X_3 = 1, m = (\lambda - 1)/2. \quad (4.4)$$

Finalmente, conmutatividad de (1.7) impone la siguiente condición en $\varphi \in K_3$:

$$\partial_3(\varphi) \cdot \partial_1(\varphi) = \partial_0(\varphi) \cdot \partial_2(\varphi) \cdot \partial_4(\varphi). \quad (4.5)$$

Aquí $\partial_0(\varphi)$ (respectivamente $\partial_4(\varphi)$) se obtiene de la trenza φ al agregar una cuerda a la izquierda (resp. derecha) de las tres existentes, mientras $\partial_i(\varphi)$ para $1 \leq i \leq 3$ se obtiene de φ la reemplazar la i -ésima cuerda de trenza φ por dos cuerdas, una justo a la izquierda de la otra (note que los K_n forman un grupo cosimplicial, donde los morfismos frontera son los $\partial_i : K_n \rightarrow K_{n+1}$, mientras que los homomorfismos de degeneración $\partial_i : K_{n+1} \rightarrow K_n$ son obtenidos al borrar una de las $n+1$ cuerdas). Es sabido [20] que K_n es generado por los elementos x_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, donde

$$x_{ij} = (\sigma_{j-2} \cdots \sigma_i)^{-1} \sigma_{j-2}^2 (\sigma_{j-2} \cdots \sigma_i) = (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1}) \sigma_i^2 (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1})^{-1}, \quad (4.6)$$

donde x_{ij} están definidos por las siguientes relaciones

$$(a_{ijk}, x_{ij}) = (a_{ijk}, x_{ik}) = (a_{ijk}, x_{jk}) = 1, \quad \text{donde } i < j < k, a_{ijk} = x_{ij} x_{ik} x_{jk}, \quad (4.7)$$

$$(x_{ij}, x_{kl}) = (x_{il}, x_{jk}) = 1 \text{ para } i < j < k < l, \quad (4.8)$$

$$(x_{ik}, x_{ij}^{-1} x_{jl} x_{ij}) = 1 \text{ para } i < j < k < l. \quad (4.9)$$

Aquí (u, v) significa $uvu^{-1}v^{-1}$. En términos de x_{ij} , (4.5) se escribe

$$f(x_{12}, x_{23} x_{24}) f(x_{13} x_{23}, x_{34}) = f(x_{23}, x_{34}) f(x_{12} x_{13}, x_{24} x_{34}) f(x_{12}, x_{23}). \quad (4.10)$$

Así, cada par (λ, f) , $\lambda \in 1 + 2\mathbb{Z}$, que satisface (4.3), (4.4), y (4.10) determina una manera “natural” de construir de cualquier categoría cuasitensorial C una nueva categoría cuasitensorial C' , que difieren en el isomorfismo de conmutatividad y de asociatividad (“natural” significa que si $F : C_1 \rightarrow C_2$ es un functor tensorial en el sentido de la definición 1.8 de [6], entonces F es un functor tensorial de $C'_1 \rightarrow C'_2$). Es fácil de ver que la correspondencia es biyectiva. La interpretación de los pares (λ, f) que satisfacen (4.3), (4.4) y (4.10) como maneras de cambiar los isomorfismos de conmutatividad y asociatividad nos permite definir en el conjunto de tales pares una estructura de semigrupo $(\lambda_1, f_1) \cdot (\lambda_2, f_2) = (\lambda, f)$, donde

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2, \quad f(X, Y) = f_1(f_2(X, Y) X^{\lambda_2} f_2(X, Y)^{-1}, Y^{\lambda_2}) \cdot f_2(X, Y). \quad (4.11)$$

Ahora supongamos que $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ satisfacen (1.1)-(1.6a). Entonces los A -módulos forman una categoría cuasitensorial (ver § 1). Sí cambiamos los isomorfismos de conmutatividad y asociatividad por medio de un par (λ, f) que satisface (4.3), (4.4), y (4.10), la

categoría cuasitensorial corresponde a $(A, \Delta, \varepsilon, \bar{\Phi}, \bar{R})$ donde

$$\bar{R} = R \cdot (R^{21} \cdot R)^m = (R \cdot R^{21})^m \cdot R, m = (\lambda - 1)/2 \quad (4.12a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \Phi \cdot f(R^{21} R^{12}, \Phi^{-1} R^{32} R^{23} \Phi) \\ &= f(\Phi R^{21} R^{12} \Phi^{-1}, R^{32} R^{23}) \cdot \Phi. \end{aligned} \quad (4.12b)$$

Las fórmulas (4.12) definen la acción de el semigrupo de todas las parejas (λ, f) que satisfacen (4.3), (4.4), y (4.10) en la colección de conjuntos $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ satisfaciendo (1.1) – (1.6a). Desafortunadamente, este semigrupo consiste solamente de el elemento identidad $(\lambda = 1, f = 1)$ y la involución $(\lambda = -1, f = 1)$ mandando $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ en $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, (R^{21})^{-1})$. Esto es una consecuencia de la siguiente proposición, debido a que de (4.10) $f(X, Y)$ pertenece al *conmutador* del grupo libre en los generadores X, Y .

Proposición 4.1. *Las ecuaciones (4.3) y (4.4), donde $f(X, Y)$ pertenece al grupo libre con generadores X e Y , son satisfechas solamente por $\lambda = \pm 1, f(X, Y) = Y^r X^{-r}$.*

Demostración. Si (λ, f) satisface las ecuaciones (4.3) y (4.4), entonces esas también son satisfechas por (λ, \tilde{f}) , donde $\tilde{f}(X, Y) = Y^{-s} f(X, Y) X^s$. De (4.3) se sigue que para cierta s o $\tilde{f} = 1$ o la representación no simplificable de $\tilde{f}(X, Y)$ es de la forma $X^l \cdots Y^{-l}, l \neq 0$. Como \tilde{f} cumple (4.4), el segundo caso es imposible, y en el primer caso $\lambda = \pm 1$ \square

Observemos que si k es un campo de característica 0, entonces las fórmulas (4.3), (4.4), (4.10), y (4.11) tienen sentido aun si suponemos que $\lambda \in k$, mientras que $f(X, Y)$ pertenece a la completación k -pro-unipotente del grupo libre con generadores X, Y , es decir, $f(X, Y)$ es una expresión formal de la forma $\exp F(\ln X, \ln Y)$, donde F es una serie formal de Lie sobre k . Así ambos lados de (4.10) pertenecen a la completación k -pro-unipotente de K_4 , es decir, son de la forma e^v , donde v pertenece al álgebra cociente de series formales de Lie en las variables $\xi_{ij}, 1 \leq i < j \leq 4$ módulo el ideal correspondiente a las relaciones (4.7)-(4.9) para $x_{ij} = \exp \xi_{ij}$.

Denotamos por $\underline{\text{GT}}(k)$ el semigrupo de pares (λ, f) que satisfacen (4.3), (4.4), y (4.10), donde $\lambda \in k$ y f pertenece a la completación k -pro-unipotente del grupo libre. El grupo de elementos invertibles de $\underline{\text{GT}}(k)$ será denotado por $\text{GT}(k)$; lo llamamos la *versión k -pro-unipotente del grupo de Grothendieck-Teichmüller*. Es fácil ver que $\text{GT}(k) = \{(\lambda, f) \in \underline{\text{GT}}(k) | \lambda \neq 0\}$. Resulta que (ver § 5, 6) el grupo $\text{GT}(k)$ es bastante grande: es infinito-dimensional, y el homomorfismo $\text{GT}(k) \rightarrow k^*$ que manda (λ, f) a λ es suprayectivo.

Si $(\lambda, f) \in \underline{\text{GT}}(k)$ y $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ es un EUC-álgebra quasitriangular quasi-Hopf sobre $k[[\hbar]]$, entonces las fórmulas (4.12), tienen sentido. Así, $\underline{\text{GT}}(k)$ actúa en el

conjunto de EUC-álgebras quasitriangular quasi-Hopf. Las torciones (ver (1.10)-(1.12)) conmutan con la acción de $\underline{\text{GT}}(k)$. Supongamos ahora que A es $U\mathfrak{g}$ con la comultiplicación usual, $R = e^{ht/2}$ y $\Phi = \exp P(ht^{12}, ht^{23})$, donde \mathfrak{g} es una álgebra de Lie por deformación sobre $k[[\hbar]]$, $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es simétrico y \mathfrak{g} -invariante, y P es una serie formal de Lie sobre k . Entonces el \bar{R} y $\bar{\Phi}$ definidos por las fórmulas (4.12) son de la forma $\bar{R} = e^{\lambda ht/2}$ y $\bar{\Phi} = \exp \bar{P}(ht^{12}, ht^{23})$, donde \bar{P} es una serie formal de Lie sobre k .

Podemos interpretar los elementos de $\underline{\text{GT}}(k)$ como endomorfismos de una cierta completación $B_n(k)$ del grupo B_n . Supongamos λ, f satisfacen (4.3), (4.4), y (4.10), con $\lambda \in 1 + 2\mathbb{Z}$ y $f(X, Y)$ perteneciendo al grupo libre en los generadores X, Y (olvidemos que solo hay dos pares (λ, f)). Sea V un objeto en una categoría cuasitensorial C , $V^{\otimes 2} = V \otimes V$, $V^{\otimes 3} = V^{\otimes 2} \otimes V$, etc. En $V^{\otimes n}$ tenemos la acción de B_n . Cambiando los isomorfismos de conmutación y asociatividad en C por medio de (λ, f) da a lugar a una nueva acción de B_n en $V^{\otimes n}$. Se obtiene de la nueva por medio de composición con el endomorfismo de B_n dado por $\sigma_1 \rightarrow \sigma_1^\lambda, \sigma_i \rightarrow f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^\lambda f(y_i, \sigma_i^2)$ para $i > 1$, donde $y_i = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}$ (en la notación de (4.6), $y_i = x_{1i} x_{2i} \cdots x_{i-1,i}$). Ahora sea $K_n(k)$ la completación k -pro-unipotente de K_n , y $B_n(k)$ el cociente de el producto semidirecto de B_n y $K_n(k)$ (los automorfismos $\text{Ad}g : K_n \rightarrow K_n, g \in B_n$, se extienden a $K_n(k)$) módulo el subgrupo de elementos de la forma $x \cdot x^{-1}, x \in K_n$, donde x se entiende como un elemento de B_n , y x^{-1} es un elemento de $K_n(k)$. Las fórmulas

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_1^{(\lambda)}, \sigma_i \rightarrow f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^{(\lambda)} f(y_i, \sigma_i^2), 1 < i \leq n, \quad (4.13)$$

donde $\sigma_i^{(\lambda)} = \sigma_i \cdot (\sigma_i^2)^{(\lambda-1)/2}$, $y_i = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}$, define una acción por la derecha de $\underline{\text{GT}}(k)$ en $B_n(k)$, que es fiel para $n \geq 3$. El endomorfismo (4.13) es compatible con los encajes $B_n(k) \rightarrow B_{n+1}(k)$ que mandan σ_i en σ_i , y ellos inducen el automorfismo identidad en los grupos $S_n = B_n(k)/K_n(k)$. El autor no sabe si cualquier conjunto de automorfismos $\gamma_n \in \text{Aut}B_n(k)$ que tiene esas propiedades proviene de un elemento de $\text{GT}(k)$ (quizás los métodos de [15] puedan ilustrar esto). En todo caso, el endomorfismo de $B_3(k)$ que manda σ_1 en $\sigma_1^{(\lambda)}$ eh induce el automorfismo identidad en S_3 tiene la forma (4.13) o, equivalentemente, la forma

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_1^{(\lambda)}, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \cdot [(\sigma_1 \sigma_2)^3]^{(\lambda-1)/2} f(\sigma_1^2, \sigma_2^2), \quad (4.14)$$

donde f satisface (4.3) y (4.4). Conversamente, (4.3) y (4.4) implican que (4.14) define un endomorfismo de $B_3(k)$.

A continuación describimos, siguiendo [2], como construir un homomorfismo canónico $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GT}(\mathbb{Q}_l)$, donde $\bar{\mathbb{Q}}$ es la cerradura algebraica de \mathbb{Q} en \mathbb{C} (aún que no usaremos esta construcción en lo que sigue). Denotemos por $\widehat{\underline{\text{GT}}}$ (respectivamente $\widehat{\underline{\text{GT}}}_l$) el semigrupo de todos los pares (λ, f) que satisfacen (4.3), (4.4), y (4.10), donde f

pertenece a la completación pro-finita (respectivamente completación pro- l) de el grupo libre, y $\lambda \in 1 + 2\widehat{\mathbb{Z}}$ (respectivamente $\lambda \in 1 + 2\widehat{\mathbb{Z}}_l$). Aquí $\widehat{\mathbb{Z}} = \lim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Los grupos de elementos invertibles en \widehat{GT} y en \widehat{GT}_l son denotados \widehat{GT} y GT_l . Existen homomorfismos naturales $\widehat{GT} \rightarrow GT_l$ y $GT_l \hookrightarrow GT(\mathbb{Q}_l)$. Lo que falta es construir un homomorfismo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{GT}$. Recordemos primero la construcción de Belyĭ[21], de un homomorfismo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}\widehat{\Gamma}$, donde Γ es el cociente de B_3 por su centro, y $\widehat{\Gamma}$ es la completación pro-finita de Γ . Existe un isomorfismo canónico $\Gamma \rightarrow \pi_1(M, x)$, donde M es el almiar que es el cociente de $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ por el grupo S_3 de transformaciones proyectivas que permutan $0, 1, \infty$, y x es la imagen de un punto en \mathbb{CP}^1 en el eje real cerca del 0. Así $\widehat{\Gamma} = \text{Gal}(F/E)$ donde E es el subcampo de S_3 -invariantes en $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ (S_3 actúa en z de la manera indicada arriba), y F es la extensión algebraica maximal de $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ en $L = \cup_n \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/n}))$ que no es ramificada fuera de $0, 1, \infty$. El grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ actúa en L , dejando E y F invariantes. Así $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ actúa en $\text{Gal}(F/E) = \widehat{\Gamma}$. El subgrupo $H \subset \widehat{\Gamma}$ que es topológicamente generado por la imagen de $\sigma_1 \in B_3$ es invariante con respecto a $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, y la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en el grupo cociente S_3 de $\widehat{\Gamma}$ es la identidad. El semigrupo de endomorfismos $\varphi : \widehat{\Gamma} \rightarrow \widehat{\Gamma}$ tales que $\varphi(H) \subset H$ y la acción de φ en S_3 es la identidad es anti-homomórfico al semigrupo de parejas (λ, f) que satisfacen (4.3) y (4.4), donde $\lambda \in 1 + 2\widehat{\mathbb{Z}}$ y f pertenece a la completación pro-finita del grupo libre: la pareja (λ, f) corresponde (ver (4.14)) al endomorfismo $\varphi : \widehat{\Gamma} \rightarrow \widehat{\Gamma}$ tal que $\varphi(\bar{\sigma}_1) = \bar{\sigma}_1^\lambda, \varphi(\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1) = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1 f(\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2)$, donde $\bar{\sigma}_i$ es la imagen de σ_i en $\widehat{\Gamma}$. Para obtener un isomorfismo entre los grupos de elementos invertibles de los dos semigrupos, combinamos el antihomomorfismo con el homomorfismo $y \rightarrow y^{-1}$.

Queda por demostrar que los pares (λ, f) correspondientes a los elementos de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ satisfacen (4.10). Esto se puede interferir de § 2 de Grothendieck [2]. Es propuesto en [2] considerar, para cada g y ν , el 'Grupoide de Teichmüller' $T_{g,\nu}$, es decir, el grupoide fundamental del almiar modular $M_{g,\nu}$ de superficies compactas de Riemann X de género g con ν puntos distinguidos x_1, \dots, x_ν . El grupoide fundamental difiere del grupo fundamental en que uno elige no uno, sino varios puntos distinguidos. En el caso presente es conveniente elegir los puntos distinguidos en "el infinito" (ver § 15 de [11]) de acuerdo a los métodos de "degeneración máxima" del conjunto (X, x_1, \dots, x_ν) . Dado que la degeneración del conjunto (X, x_1, \dots, x_ν) resulta en el decrecimiento de g y ν , los grupoideos $T_{g,\nu}$ para distintas g y ν están conectados por ciertos homomorfismos. La colección de todos los $T_{g,\nu}$ y todos los homomorfismos es llamada en [2] la torre de Teichmüller. Se observa en [2] que existe un homomorfismo natural $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow G$, donde G es el grupo de automorfismos del análogo pro-finito de la torre de Teichmüller (en la que $T_{g,\nu}$ se reemplaza por la completación pro-finita $\widehat{T}_{g,\nu}$). También se menciona en [2], como una conjetura posible, que $\widehat{T}_{0,4}$ y $\widehat{T}_{1,1}$ en un sentido determinado generan la torre $\{\widehat{T}_{g,\nu}\}$ por completo y que todas las relaciones entre generadores de la

torre provienen de $\widehat{T}_{0,4}$, $\widehat{T}_{1,1}$, $\widehat{T}_{0,5}$, y $\widehat{T}_{1,2}$. Esta conjetura fue probada, aparentemente, en el apéndice *B* de el artículo de física [22]. En todo caso, es fácil ver que $\widehat{T}_{0,4}$ genera la subtorre $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$, y que todas las relaciones en $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$ provienen de $\widehat{T}_{0,4}$ y $\widehat{T}_{0,5}$. Se puede mostrar que \widehat{GT} es el grupo de automorfismos de la torre $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$. Efectivamente, un automorfismo de la torre esta determinado de manera única por su acción en $\{\widehat{T}_{0,4}\}$, es decir, en $\widehat{\Gamma}$. Esta acción se describe por una pareja (λ, f) que satisface (4.3) y (4.4), y (4.10) es necesaria y suficiente para extender el automorfismo de $\widehat{T}_{0,4}$ a uno en $\widehat{T}_{0,5}$. La conjetura de Grothedieck implica que el grupo de automorfismos de la torre $\{\widehat{T}_{g,\nu}\}$ que son compatibles con el homomorfismo natural $\widehat{T}_{0,4} \rightarrow \widehat{T}_{1,1}$ (a un cuádruple de puntos en \mathbb{P}^1 se les asigna la doble cubierta de \mathbb{P} ramificada en esos puntos) coincide también con \widehat{GT} : si un automorfismo de $\widehat{T}_{0,4}$ se extiende a uno de $\widehat{T}_{0,5}$, entonces también se extiende a uno de $\widehat{T}_{1,2}$, pues, de acuerdo con [2], $M_{1,2}$ es casi igual a $M_{0,5}$.

El homomorfismo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{GT}$ es, por el teorema de Belyi [21], inyectivo. El estudio del kernel y la imagen del homomorfismo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GT_l$ has sido el tema de varios artículos (ver [11–14] y la literatura citada ahí).

5. Prueba del Teorema A''

Sea k un campo de característica 0, $\mathfrak{fr}_k(A, B)$ el álgebra formal de series de Lie sobre k en las variables A y B (\mathfrak{fr} proviene de “free”, libre), $\text{Fr}_k(A, B) = \exp \mathfrak{fr}_k(A, B)$ y $M_1(k)$ es el conjunto de $\varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$ que satisfacen (2.13), (2.14), donde

$$\begin{aligned} X^{ij} &= X^{ji}, [X^{ij}, X^{rl}] = 0 \text{ para } i \neq j \neq r \neq l, \\ [X^{ij} + X^{ir}, X^{jr}] &= 0 \text{ para } i \neq j \neq r. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Sea \mathfrak{a}_n^k la completación (con respecto a la graduación natural) de el álgebra de Lie sobre k con generadores X^{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$, y relaciones (5.1). Para $n \geq 3$ las álgebras \mathfrak{a}_n^k no son libres, pero se reducen a libres: \mathfrak{a}_n^k es el producto semidirecto de \mathfrak{a}_{n-1}^k y el álgebra topológicamente libre generada por los X_{in} , $1 \leq i \leq n-1$ (este último es un ideal en \mathfrak{a}_n^k). Para $n = 3$ hay una realización más conveniente: \mathfrak{a}_3^k es la suma directa de su centro, generado por el elemento $X^{12} + X^{13} + X^{23}$, y el álgebra topológicamente libre generada por X^{12} y X^{23} . Por lo cual (2.14a) es equivalente a dos igualdades, una de las cuales se obtiene al substituir $X^{12} = A$, $X^{23} = B$, $X^{13} = -A - B$ y la otra al substituir $X^{12} = X^{23} = 0$. La segunda igualdad es tautológica, y la primera es de la forma

$$e^{A/2} \varphi(C, A) e^{C/2} \varphi(C, B)^{-1} e^{B/2} \varphi(A, B) = 1, A + B + C = 0. \quad (5.2a)$$

Similarmente, (2.14b) es equivalente a la igualdad

$$\varphi(B, A)^{-1}e^{A/2}\varphi(C, A)e^{C/2}\varphi(C, B)^{-1}e^{B/2} = 1, A + B + C = 0. \quad (5.2b)$$

obtenida al substituir $X^{12} = C, X^{23} = B, X^{13} = A$. (5.2a) y (5.2b) implican (2.12). Por otra parte, si (2.12) es cierta, entonces (5.2a) y (5.2b) equivalen a la igualdad

$$e^{A/2}\varphi(C, A)e^{C/2}\varphi(B, C)e^{B/2}\varphi(A, B) = 1, A + B + C = 0. \quad (5.3)$$

Así, $M_1(k)$ es el conjunto de los $\varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$ que satisfacen (2.12), (5.3), y (2.13). Sea $M_\mu(k)$ el conjunto de $\varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$ que satisface (2.12), (2.13), y la igualdad obtenida de (5.3) al reemplazar $e^{A/2}, e^{B/2}, e^{C/2}$, por $e^{\mu A/2}, e^{\mu B/2}, e^{\mu C/2}$. Sea $\underline{M}(k) = \{(\mu, \varphi) | \mu \in k, \varphi \in M_\mu(k)\}$ y $M(k) = \{(\mu, \varphi) \in \underline{M}(k) | \mu \neq 0\}$. En $\underline{M}(k)$ hay una acción de $\underline{GT}(k)$: un elemento $(\lambda, f) \in \underline{GT}(k)$ manda $(\mu, \varphi) \in \underline{M}(k)$ en $(\lambda\mu, \bar{\varphi})$, donde $\bar{\varphi}(A, B) = f(\varphi(A, B)e^A\varphi(A, B)^{-1}, e^B) \times \varphi(A, B)$ (cf. (4.12)).

Proposición 5.1. *La acción de $GT(k)$ en $M(k)$ es libre y transitiva.*

Demostración. Si $(\mu, \varphi) \in M(k)$ y $(\bar{\mu}, \bar{\varphi}) \in M(k)$, entonces existe exactamente un f tal que $\bar{\varphi}(A, B) = f(\varphi(A, B)e^A\varphi(A, B)^{-1}, e^B) \cdot \varphi(A, B)$. Debemos demostrar que $(\lambda, f) \in GT(k)$, donde $\lambda = \bar{\mu}/\mu$. Probemos (4.10). Sea G_n el producto semidirecto de S_n y $\exp \mathfrak{a}_n^k$. Considere el homomorfismo $B_n \rightarrow G_n$ que manda σ_i en $\varphi(X^{1i} + \dots + X^{i-1, i}, X^{i, i+1})^{-1} \sigma^{i, i+1} e^{\mu X^{i, i+1}/2} \times \varphi(X^{1i} + \dots + X^{i-1, i}, X^{i, i+1})$, donde $\sigma^{ij} \in S_n$ transpone i y j . El induce un homomorfismo $K_n \rightarrow \exp \mathfrak{a}_n^k$, y por lo tanto un homomorfismo $\alpha_n : K_n(k) \rightarrow \exp \mathfrak{a}_n^k$, donde $K_n(k)$ es la completación k -pro unipotente de K_n . Es fácil ver que el lado izquierdo y derecho de (4.10) tienen la misma imagen en $\exp \mathfrak{a}_n^k$. Basta probar que α_n es un isomorfismo. El álgebra de Lie $K_n(k)$ es topológicamente generada por los elementos $\xi_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, con relaciones obtenidas por (4.7)-(4.9) substituyendo $x_{ij} = \exp \xi_{ij}$. La parte principal de esas relaciones es las mismas que (5.1), mientras que $(\alpha_n)_*(\xi_{ij}) = \mu X^{ij} + \{\text{términos menores}\}$, donde $(\alpha_n)_* : \text{Lie } K_n(k) \rightarrow \mathfrak{a}_n^k$ es inducido por el homomorfismo α_n . Concluimos que α_n es un isomorfismo, es decir, probamos (4.10). (4.3) es obvio. Para probar (4.4), podemos interpretar lo en términos de K_3 y argumentar como en la prueba de (4.10), o, lo que es lo mismo, hacer la substitución

$$X_1 = e^A, X_2 = e^{-A/2}\varphi(B, A)e^B\varphi(B, A)^{-1}e^{A/2}, X_3 = \varphi(C, A)e^C\varphi(C, A)^{-1}, \quad (5.4)$$

donde $A + B + C = 0$. \square

Identificando $M_1(k)$ con el cociente de $M(k)$ por la acción natural de k^* ($c \in k^*$ manda (μ, φ) en $(c\mu, \tilde{\varphi})$, donde $\tilde{\varphi}(A, B) = \varphi(cA, cB)$), obtenemos una acción de $\text{GT}(k)$ en $M_1(k)$. La proposición 5.1 dice que el subgrupo $\text{GT}_1(k) = \{(\lambda, f) \in \text{GT}(k) | \lambda = 1\}$ actúa libre y transitivamente; y si $M_1(k) \neq \emptyset$, entonces la sucesión $1 \rightarrow \text{GT}_1(k) \rightarrow \text{GT}(k) \xrightarrow{\nu} k^* \rightarrow 1$, donde $\nu(\lambda, f) = \lambda$, es exacta y a cada $\varphi \in M_1(k)$ le corresponde un homomorfismo $\theta_\varphi : k^* \rightarrow \text{GT}(k)$ tal que $\nu \circ \theta_\varphi = id$, mientras que $\theta_\varphi(k^*)$ es el estabilizador de φ en $\text{GT}(k)$.

Denotamos las álgebras de Lie de los grupos pro-algebraicos $\text{GT}(k)$ y $\text{GT}_1(k)$ por $\mathfrak{gt}(k)$ y $\mathfrak{gt}_1(k)$. Substituimos $f(X, Y) = \exp \varepsilon \psi(\ln X, \ln Y)$ y $\lambda = 1 + \varepsilon s$ en (4.3), (4.4), y (4.10), y linearizados con respecto a ε , veremos que $\mathfrak{gt}(k)$ consiste de pares (s, ψ) , $s \in k$, $\psi \in \mathfrak{fr}_k(\alpha, \beta)$, tales que

$$\psi(\alpha, \beta) = -\psi(\beta, \alpha), \quad (5.5)$$

$$\psi(\alpha, \beta) + \psi(\beta, \gamma) + \psi(\gamma, \alpha) + \frac{s}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 0, \text{ con } e^\alpha e^\beta e^\gamma = 1, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi_{12}, \xi_{23} * \xi_{24}) + \psi(\xi_{13} * \xi_{23}, \xi_{34}) &= \psi(\xi_{23}, \xi_{34}) + \\ + \psi(\xi_{12} * \xi_{13}, \xi_{24} * \xi_{34}) + \psi(\xi_{12}, \xi_{23}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Aquí $u * v = \ln(e^u e^v)$, y los ξ_{ij} satisfacen las relaciones obtenidas de (4.7)-(4.9) al substituir $x_{ij} = \exp \xi_{ij}$. El conmutador en $\mathfrak{gt}(k)$ tiene la forma $[(s_1, \psi_1), (s_2, \psi_2)] = (0, \psi)$, donde $\psi = [\psi_1, \psi_2] + s_2 D(\psi_1) - s_1 D(\psi_2) + D_{\psi_2}(\psi_1) - D_{\psi_1}(\psi_2)$, donde D y D_ψ son derivaciones de $\mathfrak{fr}_k(\alpha, \beta)$ tales que $D(\alpha) = \alpha$, $D(\beta) = \beta$, $D_\psi(\alpha) = [\psi, \alpha]$, y $D_\psi(\beta) = 0$.

Si $M_1(k) \neq \emptyset$, entonces la sucesión

$$0 \rightarrow \mathfrak{gt}_1(k) \rightarrow \mathfrak{gt}(k) \xrightarrow{\nu_*} k \rightarrow 0, \nu_*(s, \psi) = s, \quad (5.8)$$

es exacta, y a cada $\varphi \in M_1(k)$ le corresponde un escisión, definida por el álgebra de Lie del estabilizador de φ en $\text{GT}(k)$.

Proposición 5.2. *El mapeo $M_1(k) \rightarrow \{\text{escisiones de la sucesión (5.8)}\}$ es biyectivo. En particular, la exactitud de (5.8) implica que $M_1(k) \neq \emptyset$.*

Demostración. El mapeo manda $\varphi \in M_1(k)$ en la escisión definida por el elemento $(1, \psi) \in \mathfrak{gt}(k)$, donde ψ se obtiene de la condición

$$\varphi(A, B)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \varphi(tA, tB) |_{t=1} = \psi(A, \varphi(A, B)^{-1} B \varphi(A, B)). \quad (5.9)$$

Dado ψ , existe exactamente un $\varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$ que satisface (5.9). En vista de (5.5), (5.9) sigue siendo valido si $\varphi(A, B)$ es reemplazado por $\varphi(B, A)^{-1}$. Concluimos que

$\varphi(A, B) = \varphi(B, A)^{-1}$. Probaremos (5.3). Denote el lado izquierdo de (5.3) por $Q(A, B)$. Entonces

$$Q(A, B)^{-1} \frac{d}{dt} Q(tA, tB)|_{t=1} = \psi(A, \bar{B}) + \psi(\bar{B}, \bar{C}) + \psi(\bar{C}, \bar{A}) + \frac{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}{2}, \quad (5.10)$$

donde $\bar{A} = Q(A, B)^{-1} A Q(A, B)$, $\bar{B} = \varphi(A, B)^{-1} B \varphi(A, B)$,
 $\bar{C} = \varphi(A, B)^{-1} e^{-B/2} \varphi(B, C)^{-1} C \varphi(B, C) e^{B/2} \varphi(A, B)$.

Supongamos que hemos probado que $Q(A, B) \equiv 1 \pmod{\text{grado } n}$ (es decir, $Q(A, B) = 1 + \text{términos de grado mayor o igual que } n$). Si $Q(A, B) \equiv 1 + q(A, B) \pmod{\text{grado } (n+1)}$, donde q es homogéneo de grado n , entonces el lado izquierdo de (5.10) es congruente con $nq(A, B) \pmod{\text{grado } (n+1)}$. Como $e^{\bar{B}} e^{\bar{C}} = e^{-A/2} Q(A, C) e^{-A/2} Q(A, B)$, encontramos, que si α, β , y γ son las clases residuales de $A, \bar{B} - q(A, B)$, y $\bar{C} - q(A, C) \pmod{\text{grado } (n+1)}$, entonces $e^\alpha e^\beta e^\gamma = 1$. Así se satisface (5.6) con $s = 1$. Por lo tanto el lado derecho de (5.10) es congruente con $q(A, B) + q(A, C) \pmod{\text{grado } (n+1)}$. De la definición de \mathbb{Q} se sigue que $q(A, C) = q(B, A)$. Así, $q(B, A) = (n-1)q(A, B)$. Entonces, $q = 0$ (para $n = 2$, esto se sigue de que $q(A, B)$ es un polinomio de *Lie* y por lo tanto proporcional a $[A, B]$).

Queda por demostrar (2.13). Denotemos el lado izquierdo de (2.13) por f , y el lado derecho por g . Supongamos que hemos probado que $f \equiv g \pmod{\text{grado } (n)}$. Para probar que $f \equiv g \pmod{\text{grado } (n+1)}$, basta probar que

$$\begin{aligned} & f(X^{12}, X^{13}, \dots)^{-1} \frac{d}{dt} f(tX^{12}, tX^{13}, \dots)|_{t=1} \\ & \equiv g(X^{12}, X^{13}, \dots)^{-1} \frac{d}{dt} g(tX^{12}, tX^{13}, \dots)|_{t=1} \pmod{\text{grado } (n+1)}, \end{aligned}$$

□

es decir, que

$$\psi(\alpha, \beta) + \psi(\gamma, \delta) \equiv \psi(\lambda, \delta) + \psi(\mu, \nu) + \psi(\alpha, \lambda) \pmod{\text{grado } (n+1)}, \quad (5.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= X^{12}, \beta = f^{-1}(X^{23} + X^{24})f, \gamma = X^{13} + X^{23}, \\ \delta &= \varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34})^{-1} X^{34} \varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34}), \\ \lambda &= \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1} X^{23} \varphi(X^{12}, X^{23}), \\ \mu &= \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1} (X^{12} + X^{13}) \varphi(X^{12}, X^{23}), \\ \nu &= \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1} \varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34})^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\times (X^{24} + X^{34})\varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34})\varphi(X^{12}, X^{23}).$$

Usando (2.12), (5.3), y la congruencia $f \equiv g \pmod{\text{grado}(n)}$, construimos (ver la prueba de la proposición 5.1) un homomorfismo $h : K_4(k) \mapsto \exp(\mathfrak{a}_4^k/I)$, donde $I = \{a \in \mathfrak{a}_4^k \mid a \equiv 0 \pmod{\text{grado}(n+1)}\}$. Entonces en (5.7) poniendo $\xi_{ij} = \ln h(x_{ij})$, donde las x_{ij} son definidas por (4.6), obtenemos (5.11). \square

Proposición 5.3. $M_1(k) \neq \emptyset$.

Demostración. Debido a que $M_1(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ (ver § 2), la sucesión (5.8) es exacta para $k = \mathbb{C}$. Entonces $M_1(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ (ver Proposición 5.2) y, mas aun $M_1(k) \neq \emptyset$. Otra versión de la prueba: dado que la composición del homomorfismo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \mapsto \text{GT}(\mathbb{Q}_l)$ (ver 4) y el homomorfismo $\nu : \text{GT}(\mathbb{Q}_l) \mapsto \mathbb{Q}_L^*$ es el homomorfismo $f : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \mapsto \mathbb{Z}_l^*$ definido por la relación $\sigma^{-1}(\zeta) = \zeta^{f(\sigma)}$, donde $\zeta^{l^n} = 1$, $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, se sigue que la imagen de ν es infinita, la sucesión (5.8) es exacta para $k = \mathbb{Q}_l$, etc. \square

Se sigue que Teorema A'' (ver § 1) esta demostrado.

Proposición 5.4. *El conjunto $M_1^+(k) = \{\varphi \in M_1(k) \mid \varphi(-A, -B) = \varphi(A, B)\}$ es no vacío. En este conjunto actúa el grupo $\text{GT}^+(k) = \{(\lambda, f) \in \text{GT}(k) \mid f(X^{-1}, Y^{-1}) = f(X, Y)\}$, y la acción en $M_1^+(k)$ por el subgrupo $\text{GT}^+(k) \cap \text{GT}_1(k)$ es libre y transitiva.*

Demostración. $M_1^+(k)$ es el conjunto de elementos invariantes bajo σ de $M_1(k)$, donde $\sigma \in \text{GT}(k)$ es la involución correspondiente a $\lambda = -1$, $f = 1$. Dado que (5.8) tiene una escisión invariante bajo σ , tenemos que $M_1^+(k) \neq \emptyset$. El resto es obvio. \square

Nota. $\varphi_{KZ}(-A, -B) \neq \varphi_{KZ}(A, B)$ (ver (2.15), (2.17), o (2.18)).

La prueba previa de la Proposición 5.4 no es constructiva. Nuestro objetivo siguiente es probar la Proposición 5.8, en donde se mostrara que es posible construir elementos de $M_1(k)$ por aproximaciones sucesivas. Para este objetivo introduciremos la siguiente modificación $\text{GRT}(k)$ del grupo $\text{GT}(k)$. Denotamos por $\text{GRT}_1(k)$ el conjunto de todos los $g \in \text{Fr}_k(A, B)$ tales que

$$g(B, A) = g(A, B)^{-1}, \quad (5.12)$$

$$g(C, A)g(B, C)g(A, B) = 1 \text{ para } A + B + C = 0, \quad (5.13)$$

$$A + g(A, B)^{-1}Bg(A, B) + g(A, C)^{-1}Cg(A, C) = 0$$

para $A + B + C = 0$ (5.14)

$$g(X^{12}, X^{23} + X^{24})g(X^{13} + X^{23}, X^{34})$$

$$= g(X^{23}, X^{34})g(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34})g(X^{12}, X^{23}), \quad (5.15)$$

donde los X^{ij} satisfacen (5.1). $\text{GRT}_1(k)$ es un grupo con la operación

$$(g_1 \circ g_2)(A, B) = g_1(g_2(A, B)Ag_2(A, B)^{-1}, B) \cdot g_2(A, B). \quad (5.16)$$

En $\text{GRT}_1(k)$ esta definida la acción de k^* , dada por $\tilde{g}(A, B) = g(c^{-1}A, c^{-1}B)$, $c \in k^*$. Denotamos por $\text{GRT}(k)$ al producto semidirecto de k^* y $\text{GRT}_1(k)$. El álgebra de Lie $\mathfrak{grt}_1(k)$ del grupo $\text{GRT}_1(k)$ consiste en series $\psi \in \mathfrak{ft}_k(A, B)$ tales que

$$\psi(B, A) = -\psi(A, B), \quad (5.17)$$

$$\psi(C, A) + \psi(B, C) + \psi(A, B) = 0 \text{ para } A + B + C = 0, \quad (5.18)$$

$$[B, \psi(A, B)] + [C, \psi(A, C)] = 0 \text{ para } A + B + C = 0 \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} & \psi(X^{12}, X^{23} + X^{24}) + \psi(X^{13} + X^{23}, X^{34}) \\ &= \psi(X^{23}, X^{34}) + \psi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34}) + \psi(X^{12}, X^{23}), \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde las X^{ij} satisfacen (5.1). Un conmutador \langle, \rangle en $\mathfrak{grt}_1(k)$ es de la forma

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = [\psi_1, \psi_2] + D_{\psi_2}(\psi_1) - D_{\psi_1}(\psi_2), \quad (5.21)$$

donde $[\psi_1, \psi_2]$ es el conmutador en $\mathfrak{ft}_k(A, B)$ y D_ψ es la derivación de $\mathfrak{ft}_k(A, B)$ dada por $D_\psi(A) = [\psi, A]$, $D_\psi(B) = 0$. El álgebra $\mathfrak{grt}_1(k)$ es graduada, y el álgebra de Lie $\mathfrak{grt}_1(k)$ del grupo $\text{GRT}(k)$ es la suma semi directa del álgebra de dimensión 1 k y $\mathfrak{grt}_1(k)$, donde k actúa en $\mathfrak{grt}_1(k)$ de la manera siguiente: $1 \in k$ transforma un elemento homogéneo $\psi \in \mathfrak{grt}_1(k)$ de grado n en $-n\psi$.

Notas. 1. $\mathfrak{grt}_1(k)$ tiene la filtración cuyo termino n -ésimo es $\{(0, \psi) \in \mathfrak{grt}_1(k) \mid \psi \equiv 0 \text{ mód grado } n\}$. Podemos usar la filtración para construir una álgebra de Lie graduada completa $\hat{\mathfrak{grt}}_1(k)$. Se mostrara (ver proposición 5.6) que $\hat{\mathfrak{grt}}_1(k) = \mathfrak{grt}_1(k)$. Esta es la razón por la que usamos las notaciones \mathfrak{grt} , GRT . No es difícil de probar la inclusión $\hat{\mathfrak{grt}}_1(k) \subset \mathfrak{grt}_1(k)$: (5.19) se sigue de la relación $\psi(\alpha, \beta) - e^{-\beta}\psi(\alpha, \beta)e^\beta + e^\gamma\psi(\alpha, \gamma)e^{-\gamma} - \psi(\alpha, \gamma) = 0$, donde $(0, \psi) \in \mathfrak{grt}_1(k)$, $e^\alpha e^\beta e^\gamma = 1$. A su vez, esto se sigue del resultado análogo valido en $\text{GT}_1(k)$: si $(1, f) \in \text{GT}_1(k)$, entonces

$$\begin{aligned} & X_1 \cdot f(X_1, X_2)^{-1} X_2 f(X_1, X_2) \cdot f(X_1, X_3)^{-1} X_3 f(X_1, X_3) \\ &= X_1 f(X_2, X_1) X_2 f(X_3, X_2) X_3 f(X_1, X_3) \\ &= f(\tilde{X}_2, X_1) f(X_3, \tilde{X}_2) f(X_1, X_3) = 1 \end{aligned}$$

para $X_1 X_2 X_3 = 1$, donde $\tilde{X}_2 = X_1 X_2 X_1^{-1} = X_3^{-1} X_2 X_3$. Sin embargo no es necesario verificar (5.19) (ver Proposición 5.7).

2. La conexión entre $GT_1(k)$ y $GRT_1(k)$ también se puede explicar de la siguiente manera: si $\{g_\varepsilon\}$ es una familia de elementos de $Fr_k(A, B)$ tal que $(1, f_\varepsilon) \in GT_1(k)$ para $\varepsilon \neq 0$, donde $f_\varepsilon(X, Y) = g_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \ln X, \varepsilon^{-1} \ln Y)$, entonces $g_0 \in GRT_1(k)$.
3. $GRT_1(k)$, y $GT(k)$ tienen una interpretación categórica. Sea C una categoría tensorial, y supongamos que hemos fijado automorfismos $\tau_{V,W} \in Aut(V \otimes W)$, que son functoriales en $V, W \in C$, con $c_{V,W}\tau_{V,W} = \tau_{W,V}c_{V,W}$ y

$$\ln \tau_{U \otimes V, W} = id_U \otimes \ln \tau_{V,W} + (c_{U,V}^{-1} \otimes id)(id_V \otimes \ln \tau_{U,W})(c_{U,V} \otimes id),$$

donde c es el isomorfismo de conmutatividad (por supuesto, uno primero debe fijar las condiciones necesarias en C y τ para que la igualdad tenga sentido; ejemplo típico: C es la categoría de $U\mathfrak{g}$ módulos completos h -ádicamente, y $\tau_{V,W}$ es el operador en $V \otimes W$ correspondiente a $e^{ht} \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, donde \mathfrak{g} y t son los objetos definidos en § 1). Asumiendo que todas las expresiones de la forma $g(\ln \tau_{U,V} \otimes id_W, id_U \otimes \ln \tau_{V,W})$, donde $g(A, B) \in Fr_k(A, B)$. Entonces si $g \in GRT_1(k)$ y consideramos $g(\ln \tau_{U,V} \otimes id_W, id_U \otimes \ln \tau_{V,W})$ como nuevo isomorfismo de asociatividad $(U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$ sin cambiar c ni τ , entonces obtenemos una estructura del mismo tipo que la estructura original.

La fórmula $\tilde{\varphi}(A, B) = \varphi(g(A, B)Ag(A, B)^{-1}, B) \cdot g(A, B)$, donde $\varphi \in M_\mu(k)$ y $g \in GRT_1(k)$, define una acción derecha de $GRT_1(k)$ en $M_\mu(k)$. Esto induce una acción de $GRT_1(k)$ en $\underline{M}(k) = \{(\mu, \varphi) | \varphi \in M_\mu(k)\}$. Las formulas $\tilde{\varphi}(A, B) = \varphi(c^{-1}A, c^{-1}B)$ y $\tilde{\mu} = c^{-1}\mu$, donde $c \in k^*$, definen una acción de k^* en $\underline{M}(k)$. Como resultado, obtenemos una acción derecha de $GRT(k)$ en $\underline{M}(k)$. Esta acción conmuta con la acción izquierda de $GT(k)$.

Proposición 5.5. *La acción de $GRT(k)$ en $M(k)$ es libre y transitiva. La acción de GRT_1 en $M_1(k)$ también tiene esas dos propiedades.*

Demostración. Es suficiente con probar el segundo enunciado. Si $\varphi, \bar{\varphi} \in M_1(k)$ entonces existe exactamente un $g \in Fr_k(A, B)$ tal que $\bar{\varphi}(A, B) = \varphi(g(A, B)Ag(A, B)^{-1}, B) \times g(A, B)$; explícitamente,

$$g(A, B) = \chi(\bar{\varphi}(A, B)A\bar{\varphi}(A, B)^{-1}, B) \cdot \bar{\varphi}(A, B), \quad (5.22)$$

donde $\chi \in Fr_k(A, B)$ es inversa a ϕ con respecto a la operación (5.16), i.e., $\chi(\phi(A, B)A\phi(A, B)^{-1}, B) \cdot \phi(A, B) = 1$. Siguiendo los pasos de la prueba de la Proposición 5.1, encontramos que $(0, f) \in \underline{GT}(k)$, donde $f(X, Y) = \chi(\ln X, \ln Y)$. La ecuación (5.22) dice que g es el resultado de la acción de $(0, f)$ en $\bar{\varphi}$, y por lo tanto $g \in M_0(k)$, i.e., g satisface (5.12), (5.13) y (5.15). Ahora usaremos la igualdad

$$\begin{aligned} \ln X_1 + X_1^{1/2} f(X_1, X_2)^{-1} \ln X_2 \cdot f(X_1, X_2) X_1^{-1/2} \\ + f(X_1, X_3)^{-1} \ln X_3 \cdot f(X_1, X_3) = 0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde $X_1 X_2 X_3 = 1$, demostrado por la substitución (5.4). Finalmente, haciendo una substitución como (5.4) en (5.23) con φ reemplazada por $\bar{\varphi}$, y usando (5.22), obtenemos (5.14). \square

De la Proposición 5.1 y Proposición 5.5 se deduce:

Proposición 5.6. *Cada $\varphi \in M(k)$ determina un isomorfismo $s_\varphi : GRT(k) \xrightarrow{\sim} GT(k)$, que se caracteriza por el hecho de que $\gamma \in GRT(k)$ actúa on φ por la derecha de la misma manera que $s_\varphi(\gamma)$ actúa por la izquierda. El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} GRT(k) & \xrightarrow{s_\varphi} & GT(k) \\ & \searrow & \swarrow \\ & k^* & \end{array}$$

es conmutativo, de tal manera que $s_\varphi(GRT_1(k)) = GT_1(k)$. La escisión de la secuencia (5.8) que corresponde a $\varphi \in M_1(k)$ esta definida por el homomorfismo $s_\varphi \circ i : k^* \mapsto GT(k)$, donde i es el encaje canónico $k^* \rightarrow GRT(k)$. Finalmente, $\hat{\mathfrak{gr}}\mathfrak{gt}_1(k) = \mathfrak{gr}\mathfrak{t}_1(k)$, y si $\varphi \in M_1(k)$, entonces s_φ induce la función identidad $\mathfrak{gr}\mathfrak{t}_1(k) \rightarrow \hat{\mathfrak{gr}}\mathfrak{gt}_1(k)$.

Proposición 5.7. (5.17), (5.18) y (5.20) implican (5.19).

Demostración. Denote el lado izquierdo de (5.19) por $s(B, C)$. Entonces $s(B, C) = s(C, B)$. Mas aun,

$$s(Y_1, Y_2) = s(Y_1, Y_2 + Y_3) + s(Y_1 + Y_2, Y_3) - s(Y_2, Y_3) = 0, \quad (5.24)$$

donde los Y_i son generadores del álgebra libre de Lie. En efecto, denote el lado izquierdo de (5.24) por $u(Y_1, Y_2, Y_3)$. Entonces se sigue de (5.17) y (5.18) que $u(X^{14}, X^{24}, X^{34}) = [X^{14} + X^{24} + X^{34}, \mu^{1234}] - [X^{14} + X^{24}, \mu^{1243}] + [X^{14}, \mu^{1423}]$, donde $\mu^{1234} = \{ \text{el lado izquierdo de (5.20)} \} - \{ \text{el lado derecho de (5.20)} \}$. Entonces, (5.17), (5.18), y (5.20) implican (5.24). Falta probar que si un polinomio simétrico de Lie $s(B, C)$ satisface (5.24), entonces $s = 0$. Es bien sabido que si $s(x, y)$ es un polinomio ordinario (conmutativo) en dos conjuntos de variables $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ y $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ tales que $s(y, x) = s(x, y)$ y se satisface (5.24), entonces s es de la forma $f(x+y) - f(x) - f(y)$. Esto se puede observar (ver la prueba de [1, Proposición 2.2]) al representar el espacio de polinomios homogéneos $s(X, Y)$ de grado n en la forma $V_m \otimes_{S_m} W_m$, donde V_m es el espacio de polinomios en $x_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}), \dots, x_m = (x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(n)})$,

lineal en cada x_i , y W_m es un S_m modulo apropiado. El mismo argumento aplica al caso de Lie (por V_m debemos considerar el espacio de todos los polinomios de Lie en m variables, lineal en cada variable); pero ahora $f(x)$ es un polinomio de Lie en x , i.e., $f(x) = cx$, $c \in k$. Entonces $s = 0$. \square

Pongamos $\mathfrak{fr}_k^{(r)}(A, B) = \mathfrak{fr}_k(A, B)/I_r$, donde $I_r = \{u \in \mathfrak{fr}_k(A, B) | u \equiv 0 \text{ mód grado } r\}$. Sea $\text{Fr}_k^{(r)}(A, B) = \exp \mathfrak{fr}_k^{(r)}(A, B)$, y sea $M_1^{(r)}(k)$ el conjunto de todos los $\varphi \in \text{Fr}_k^{(r)}(A, B)$ que satisfacen (2.12), (5.3), y (2.13) mód grado r .

Proposición 5.8. *La función $M_1^{(r+1)}(k) \rightarrow M_1^{(r)}(k)$ es suprayectiva.*

Demostración. Similarmente a $\text{GRT}_1(k)$ consideramos al grupo $\text{GRT}_1^{(r)}(k)$, consistente de todos los elementos $g \in \text{Fr}_k^{(r)}(A, B)$ que satisfacen (5.12)-(5.15) mód grado n . Similarmente a la Proposición 5.5 podemos probar que $\text{GRT}_1^{(r)}(k)$ actúa en $M_1^{(r)}(k)$ de manera libre y transitiva. Basta probar que el homomorfismo $\text{GRT}_1^{(r+1)}(k) \rightarrow \text{GRT}_1^{(r)}(k)$ es suprayectivo. Como ambos grupos son unipotentes y por lo tanto conexos, basta con probar suprayectividad del homomorfismo $\mathfrak{gtr}_1^{(r+1)}(k) \rightarrow \mathfrak{gtr}_1^{(r)}(k)$. Y de hecho, de la Proposición 5.7 se sigue que $\mathfrak{gtr}_1^{(r)}(k)$ es la suma de los componentes homogéneos de $\mathfrak{gtr}_1(k)$ de grado menor que r . \square

Nota. 1. *Cualquier $\varphi \in M_1^{(r)}(k)$ tal que $\varphi(-A, -B) = \varphi(A, B)$ se puede extender a $\bar{\varphi} \in M_1^{(r+1)}(k)$ tal que $\bar{\varphi}(-A, -B) = \bar{\varphi}(A, B)$: basta con poner $\bar{\varphi}(A, B) = (\tilde{\varphi}(A, B) + \tilde{\varphi}(-A, -B))/2$, donde $\tilde{\varphi}$ es cualquier imagen inversa de φ en $M_1^{(r+1)}(k)$.*

2. *La prueba de la Proposición 5.8 usa la Proposición 5.3. Sin usar la Proposición 5.3, uno puede mostrar, por métodos estándares en la teoría de la deformación, que la obstrucción a la existencia, para alguna $\varphi \in M_1^{(r)}(k)$, de una imagen inversa en $M_1^{(r+1)}(k)$ pertenece a la componente r -ésima del cuarto grupo de cohomología del siguiente complejo \underline{L}^* . Primero considere un complejo L^* , donde L^n es la suma directa algebraica de los componentes homogéneos de \mathfrak{a}_n^k , y la diferencial en L^* es tal que para cada álgebra de Lie/ k \mathfrak{g} y cada invariantes simétrico $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ el homomorfismo $\mathfrak{a}_n^k \rightarrow (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$ que manda X^{ij} en t^{ij} define un morfismo de L^* al complejo $C^*(\mathfrak{g})$ (ver (3.7)). $C^*(\mathfrak{g})$ contiene el subcomplejo de Harrison-Barr $\underline{C}^*(\mathfrak{g})$ ($\oplus C^n(\mathfrak{g})$ es el super álgebra de Lie generada por el espacio vectorial $U\mathfrak{g}$, cuyos elementos se consideran impares, donde $\oplus_n C^n(\mathfrak{g})$ es un álgebra libre asociativa). En [23] una proyección $e_n \in \mathbb{Q}[S_n]$ es construida tal que $\underline{C}^n(\mathfrak{g}) = e_n \cdot C^n(\mathfrak{g})$; a saber, $e_n = (n!)^{-1} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) c_{\sigma} \cdot \sigma$, donde $\sigma \in S_n$, $\varepsilon(\sigma)$ es el signo de σ , y $c_{\sigma} = (-1)^a a!(n-1-a)!$, $a = \text{Card}\{k | \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1)\}$.*

El complejo \underline{L}^* esta definido por la formula $\underline{L}^n = e_n \cdot L^n$. El autor no sabe si su cuarto grupo de cohomología H^4 es igual a 0. Es fácil ver que $H^n = \underline{L}^n = 0$ para $n < 2$, $\dim H^2 = \dim \underline{L}^2 = 1$, y H^3 es la suma directa algebraica de los componentes homogéneos de $\mathfrak{gtt}_1(k)$.

Proposición 5.9. (5.12), (5.13), y (5.15) implican (5.14). En otras palabras, $GRT_1(k) = M_0(k)$.

Demostración. Basta con mostrar que si $\varphi \in M_0(k)$, $\varphi \equiv 1$ mód grado n , entonces el resultado de la acción en φ por algún $g \in GRT_1(k)$, donde $g \equiv 1$ mód grado n , es congruente con 1 mód grado $(n+1)$. En efecto, sea ψ la componente de grado n de la serie $\ln \varphi \in \mathfrak{fr}_k(A, B)$. Entonces ψ satisface (5.17), (5.18), y (5.20), y por lo tanto también (5.19), i.e., $\psi \in \mathfrak{gtt}_1(k)$. Por lo tanto podemos poner $g = \text{Exp}(-\psi)$, donde Exp es la función exponencial $\mathfrak{gtt}_1(k) \rightarrow GRT_1(k)$ correspondiente a la operación (5.16). \square

Notas. 1. Con la ayuda de la Proposición 5.9 o su método de prueba, es sencillo obtener una prueba de la Proposición 5.5 mas simple que la expuesta arriba, pero usando Proposición 5.7.

2. Aquí hay un bosquejo de otra prueba de la Proposición 5.2. Denote por $\text{Spl}(k)$ el conjunto de homomorfismos $k \rightarrow \mathfrak{gt}(k)$ que escinden (5.8). Ponga $GT_0(k) = \{(\lambda, f) \in \underline{GT}(k) | \lambda = 0\}$ y $GT'_0(k) = \{(0, f) \in GT_0(k) | f \text{ satisface (5.23)}\}$. En el proceso de probar la Proposición 5.5 construimos una función $M_1(k) \rightarrow GT'_0(k)$. Es fácil ver que es biyectiva. Por otra parte, un elemento de $\text{Spl}(k)$, o, lo que es lo mismo, un elemento de $\mathfrak{gt}(k)$ de la forma $(1, \psi)$, determina a un subgrupo uni-paramétrico $\gamma : k^* \rightarrow GT(k)$. A priori, γ es una función formal (i.e., $\gamma(\lambda)$ se expresa en términos de series formales en $\lambda - 1$), pero de hecho λ es regular y, mas aun, se extiende una función regular (i.e., polinomio) $\underline{\gamma} : k^* \rightarrow \underline{GT}(k)$. Esto se sigue de $\gamma(\lambda) = (\lambda, f_\lambda)$, donde

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} f_\lambda(X, Y) = \psi(\lambda f_\lambda(X, Y) \cdot \ln X \cdot f_{\lambda^{-1}}(X, Y)^{-1}, \lambda \ln Y) \cdot f_{\lambda^{-1}}(X, Y).$$

Fijemos $f = f_0$. Entonces $(0, f) \in GT'_0(k)$. En efecto, pues $(\lambda, f_\lambda) \in \underline{GT}(k)$ y $(-1, 1) \in \underline{GT}(k)$, tenemos $(-\lambda, f_\lambda) = (-1, 1) \cdot (\lambda, f_\lambda) \in \underline{GT}(k)$, y para probar (5.23) es suficiente con abstraer de la igualdad (4.4) para (λ, f_λ) la igualdad (4.4) para $(-\lambda, f_\lambda)$, dividir por λ y dejar λ tender a 0. La composición $\text{Spl}(k) \rightarrow GT'_0(k) \rightarrow M_1(k)$ es inversa a la función $M_1(k) \rightarrow \text{Spl}(k)$ usado en la Proposición 5.2.

3. En realidad, $GT_0(k) = GT'_0(k)$. En efecto, elije $\varphi \in M_1(k)$, y sea g el resultado de la acción de $(0, f) \in GT_0(k)$ en φ . Entonces $g \in M_0(k)$. Por lo tanto $g \in$

$GRT_1(k)$ (ver la Proposición 5.9). Si $\tilde{\varphi}$ es el resultado de la acción derecha de g^{-1} en φ , entonces el resultado de la acción izquierda de $(0, f)$ en $\tilde{\varphi}$ es 1, i.e., $(0, f)$ es la imagen de $\tilde{\varphi}$ bajo la función canónica $M_1(k) \rightarrow GT'_0(k)$.

4. Aquí hay otra prueba del Teorema B. Fije $\varphi \in M_1(k)$, y sea $(0, f)$ el elemento correspondiente en $GT'_0(k)$. Sea $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ una álgebra quasitriangular quasi-Hopf EUC sobre $k[[h]]$. Bajo la acción del elemento $(0, f) \in GT'_0(k)$ en $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ (ver (4.12)), obtenemos una álgebra triangular quasi-Hopf EUC $(A, \Delta, \varepsilon, \bar{\Phi}, \bar{R})$ (triangular es quasitriangular mas la igualdad $\bar{R}^{21} = \bar{R}^{-1}$). De las Proposiciones 3.6 y 3.7 de [1], una torsión elegida cuidadosamente hace $\bar{R} = 1$ y $\bar{\Phi} = 1$, y entonces (A, Δ, ε) es el álgebra envolvente universal de algún álgebra por deformación de Lie \mathfrak{g} sobre $k[[h]]$. En esta situación definimos $t = 2h^{-1} \cdot \ln R$ y mostramos que t es un elemento simétrico invariante bajo \mathfrak{g} de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, donde $\Phi = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$. Como $\bar{R} = 1$, tenemos $R^{21} = R$, i.e., $t^{21} = t$. De (1.5) se sigue que t es invariante bajo \mathfrak{g} . Substituyendo $X_1 = (\Delta \otimes id)(R^{12}R)^{-1}$, $X_2 = (R^{12})^{-1}(\Phi^{213})^{-1}R^{31}R^{13}(\Phi^{213})R^{12}$, y $X_3 = \Phi^{-1}R^{32}R^{23}\Phi$ en (5.23), y usando el hecho que $X_1^{-1} \cdot R^{21}R^{12}$ conmuta con X_1, X_2, X_3 , deducimos que

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)(\ln(R^{21}R)) &= \bar{\Phi}^{-1} \cdot \ln(R^{32}R^{23}) \cdot \bar{\Phi} \\ &+ (\tilde{R}^{12})^{-1}(\bar{\Phi}^{213})^{-1} \cdot \ln(R^{31}R^{13}) \cdot \bar{\Phi}^{-213}\bar{R}^{12}, \end{aligned}$$

i.e. $(\Delta \otimes id)(t) = t^{13} + t^{23}$. Entonces, $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Finalmente, tenemos $\varphi(\chi(A, B)A\chi(A, B)^{-1}, B) \cdot \chi(A, B) = 1$, donde $\chi(A, B) = f(e^A, e^B)$ (ver la prueba de la Proposición 5.5). Poniendo $A = h \cdot \Phi t^{1/2} \Phi^{-1}$ y $B = ht^{23}$, obtenemos $\varphi(h \cdot \bar{\Phi} t^{12} \bar{\Phi}^{-1}, ht^{23}) \cdot \bar{\Phi} \Phi^{-1} = 1$, i.e., $\bar{\Phi} = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$.

6. Sobre el álgebra $\mathfrak{grt}_1(k)$

Recordemos que denotamos por $\mathfrak{fr}_k(A, B)$ al conjunto de series formales de Lie $\psi(A, B)$ con coeficientes en k , y por \mathfrak{grt}_1 el conjunto de todas las $\psi \in \mathfrak{fr}_k(A, B)$ que satisfacen (5.17)-(5.20). Por la Proposición 5.7, las identidades (5.17), (5.18), y (5.20) implican (5.19). Mas aun, (5.17) y (5.19) implican (5.18): en efecto, de (5.17) y (5.19) uno puede derivar sencillamente que el lado izquierdo de (5.18) conmuta con A y B . Ahora, $\mathfrak{grt}_1(k)$ es un álgebra de Lie con conmutador (5.21). El conjunto de los $\psi \in \mathfrak{fr}_k(A, B)$ que satisfacen (5.17), (5.19), y por lo tanto (5.18) también forma un álgebra de Lie con conmutador (5.21). Llamamos a esta álgebra $\text{Ih}(k)$, en honor a Ihara. Ambas álgebras $\mathfrak{grt}_1(k)$ y $\text{Ih}(k)$ son graduadas: $\mathfrak{grt}_1(k) = \hat{\oplus}_n \mathfrak{grt}_1^n(k)$ y $\text{Ih}(k) = \hat{\oplus}_n \text{Ih}^n(k)$, donde $\hat{\oplus}$ es la completación de la suma directa. Como $\text{Ih}^1(k)$ es generado por el elemento central $A - B$, el estudio de $\text{Ih}(k)$ se reduce al estudio del subálgebra $\underline{\text{Ih}}(k) = \hat{\oplus}_{n>1} \text{Ih}^n(k)$. Notemos que

$\mathfrak{grt}_1(k) \subset \underline{\text{Ih}}(k)$ (basta con substituir $X^{12} = A$ y $X^{13} = X^{14} = X^{23} = X^{34} = 0$ en (5.20)).

En [13] y [14], Ihara usa la siguiente realización de $\underline{\text{Ih}}(k)$. El denomina a una derivación continua $\partial : \mathfrak{fr}_k(A, B) \rightarrow \mathfrak{fr}_k(A, B)$ como *especial* si $\partial(A) = [R_1, A]$, $\partial(B) = [R_2, B]$, y $\partial(C) = [R_3, C]$ para ciertos $R_1, R_2, R_3 \in \mathfrak{fr}_k(A, B)$ y donde $C = -A - B$. Las derivaciones especiales forman un álgebra de Lie $\text{SDerfr}_k(A, B)$. Considera la acción de grupo S_3 en $\mathfrak{fr}_k(A, B)$ que permuta A, B, C . Esta acción induce una acción de S_3 en $\text{SDerfr}_k(A, B)$ y en el conjunto de derivaciones internas $\text{Intfr}_k(A, B)$. Es posible mostrar que la subálgebra de invariantes bajo la acción de S_3 en el álgebra $\text{SDerfr}_k(A, B)/\text{Intfr}_k(A, B)$ es isomorfa canónicamente a $\underline{\text{Ih}}(k)$: un elemento $\psi \in \underline{\text{Ih}}(k)$ corresponde a la clase de la derivación $\partial_\psi : \mathfrak{fr}_k(A, B) \rightarrow \mathfrak{fr}_k(A, B)$ dada por $\partial_\psi(A) = 0$ y $\partial_\psi(B) = [\psi, B]$. En efecto, podemos identificar $\text{SDerfr}_k(A, B)/\text{Intfr}_k(A, B)$ con el álgebra de derivaciones $\partial : \mathfrak{fr}_k(A, B) \rightarrow \mathfrak{fr}_k(A, B)$ tal que $\partial(A) = 0$, $\partial(B) = [\psi, B]$, y $\partial(C) = [\chi, C]$ para algunos $\psi, \chi \in \mathfrak{fr}_k(A, B)$ tales que $[\psi(A, B), B] + [\chi(A, B), C] = 0$, $\psi \equiv 0 \pmod{\text{grado } 2}$, $\chi \equiv 0 \pmod{\text{grado } 2}$. La invariancia de ∂ con respecto a la permutación de B y C significa que $\chi(A, B) = \psi(A, C)$. La invariancia de ∂ modulo $\text{Intfr}_k(A, B)$ con respecto a la permutación de A y B significa que $\psi(B, A) = -\psi(A, B)$. Finalmente, $\partial_{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle} = [\partial_{\psi_1}, \partial_{\psi_2}]$: en efecto, en (5.21) $D_\psi = \text{ad}\psi - \partial_\psi$, y por lo tanto $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \partial_{\psi_1}(\psi_2) - \partial_{\psi_2}(\psi_1) - [\psi_1, \psi_2]$.

Nota. Si de la acción derecha (4.13) del grupo $GT_1(k)$ en la completación del grupo libre con generadores σ_1^2 y σ_2^2 construimos de la manera usual una acción izquierda, y luego pasamos del grupos a álgebras de Lie y de álgebras filtradas a graduadas, obtenemos la acción de $\mathfrak{grt}_1(k)$ en $\mathfrak{fr}_k(A, B)$ dada por la formula $\psi \rightarrow \partial_\psi$.

Ahora veremos una interpretación “hamiltoniana” de $\underline{\text{Ih}}(k)$. Para cualquier álgebra de Lie \mathfrak{a} denotamos por $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ el cociente de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ por el subespacio generado por los elementos de la forma $x \otimes y - y \otimes x$ y $[x, y] \otimes z - x \otimes [y, z]$, donde $x, y, z \in \mathfrak{a}$. La imagen de $x \otimes y$ en $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ es denotada por (x, y) . Las identidades $(x, y) = (y, x)$ y $([x, y], z) - (x, [y, z])$ nos permiten considerar (x, y) como un producto escalar invariante con valores en $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ (cualquier producto invariante escalar con valores en k en \mathfrak{a} es composición de este producto y un funcional lineal $\mathcal{F}(\mathfrak{a}) \rightarrow k$). Si \mathfrak{a} es un álgebra de Lie libre con generadores Y_1, \dots, Y_m , entonces en lugar de $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ debemos escribir $\mathcal{F}(Y_1, \dots, Y_m)$. Un elemento $f \in \mathcal{F}(A, B)$ se puede considerar como una fórmula definiendo para cada álgebra de Lie metrizada \mathfrak{g} (i.e., álgebra de Lie de dimensión finita con un producto invariante escalar no degenerado) una función $f_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$. Por ejemplo, $f = ([A, B], [A, B]) \in \mathcal{F}(A, B)$ define la función $f_{\mathfrak{g}}(x, y) = ([x, y], [x, y])$. Es fácil mostrar que si $f \neq 0$, entonces $f_{\mathfrak{g}} \neq 0$ en algún Lie álgebra metrizada (por \mathfrak{g} podemos tomar $\mathfrak{gl}(n)$, donde n es suficientemente largo). Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie metrizada, entonces $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ se identifica con $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, y consecuentemente el espacio de funciones en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tiene un bracket de Poisson natural (el “bracket de Kirillov”). Si $f, \varphi \in \mathcal{F}(A, B)$,

entonces $\{f_{\mathfrak{g}}, \varphi_{\mathfrak{g}}\} = \psi_{\mathfrak{g}}$ para algún $\psi \in \mathcal{F}(A, B)$ independiente de \mathfrak{g} , que denotamos por $\{f, \varphi\}$. Entonces, $\mathcal{F}(A, B)$ es un álgebra de Lie con respecto a este bracket de Poisson. La acción descrita previamente de S_3 en $\mathfrak{fr}_k(A, B)$ induce una acción de S_3 en $\mathcal{F}(A, B)$.

Proposición 6.1. 1. La acción de S_3 en $\mathcal{F}(A, B)$ preserva el bracket de Poisson.

2. El subálgebra de invariantes bajo la acción de S_3 del álgebra $\mathcal{F}(A, B)$ es isomorfo a $\oplus_n \text{Ih}^n(k)$, donde \oplus es la suma directa algebraica.

Demostración. 1. Basta con mostrar que para toda álgebra de Lie \mathfrak{g} la acción de S_3 en el álgebra de Poisson de funciones invariantes bajo \mathfrak{g} en $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, que es obtenida al identificar $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ con $\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$ vía la proyección $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$, preserva el bracket de Poisson. Esto se sigue del hecho que el álgebra de Poisson estudiada se puede representar como el cociente del álgebra de Poisson de funciones invariantes bajo \mathfrak{g} en $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ por el ideal de funciones que son 0 cuando $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (que este ideal es Poisson es sabido por la teoría de reducción hamiltoniana).

2. Si $f \in \mathcal{F}(Y_1, \dots, Y_m)$, denotamos por $\partial f / \partial Y_i$ el polinomio de Lie en Y_1, \dots, Y_m tal que la parte lineal en Z de $f(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_i + Z, Y_{i+1}, \dots, Y_m)$ es igual a $(\partial f / \partial Y_i, Z)$. De la invarianza bajo \mathfrak{g} de $f_{\mathfrak{g}}$ para cualquier álgebra de Lie metrizada se sigue que $\sum_{i=1}^m [Y_i, \partial f / \partial Y_i] = 0$. □

Lema. Si $\sum_{i=1}^m [Y_i, P_i] = 0$, donde P_i son polinomios de Lie en Y_1, \dots, Y_m , entonces existe exactamente un $f \in \mathcal{F}(Y_1, \dots, Y_m)$ tal que $\partial f / \partial Y_i = P_i$ para todo i .

Demostración. La relación usual entre polinomios y funciones simétricas multilineales nos permite restringirnos al caso en que P_1 no contiene Y_1 , manteniendo P_2, \dots, P_m y f lineales en Y_1 . En este caso, si f existe, entonces $f = (Y_1, P_1)$. Conversamente, si $f = (Y_1, P_1)$, entonces $\partial f / \partial Y_i = P_i$ para toda i . En efecto, ponemos $Q_i = P_i - \partial f / \partial Y_i$. Entonces $Q_1 = 0$ y $\sum_{i=1}^m [Y_i, Q_i] = 0$. Para $i > 1$ escribimos Q_i en la forma $R_i(\text{ad}Y_2, \dots, \text{ad}Y_m)Y_1$, donde R_i es un polinomio asociativo. Entonces $\sum_{i=2}^m u_i R_i(u_2, \dots, u_m) = 0$, y por lo tanto $R_2 = \dots = R_m = 0$. □

Supongamos que $\psi \in \oplus_n \text{Ih}^n(k)$. Se sigue del lema que existe un único $f \in \mathcal{F}(A, B)$ tal que $\partial f / \partial A = \psi(A, -A - B)$ y $\partial f / \partial B = \psi(B, -A - B)$. Claramente, $f(B, A) = f(A, B)$. Mas aun, $f(A, B) = f(-A - B, B)$ (ambos lados de la identidad tienen las mismas derivadas parciales). Esto implica que f es invariante bajo la acción de S_3 . Conversamente, si $f \in \mathcal{F}(A, B)$ es invariante con respecto a la acción de S_3 , entonces, definiendo $\psi(A, B)$ de la relación $\psi(A, -A - B) = \partial f / \partial A$, encontramos que $\psi \in \text{Ih}(k)$.

Para mostrar que el bracket de Poisson en $\mathcal{F}(A, B)$ corresponde al conmutador en $Ih(k)$, usamos el encaje $Ih(k) \rightarrow \text{Der}\mathfrak{t}_k(A, B)$ que manda ψ en $\delta_\psi = \sigma\partial_\psi\sigma$, donde $\partial_\psi \in \text{Der}\mathfrak{t}_k(A, B)$ fue definido previamente y σ es el automorfismo de $\mathfrak{t}_k(A, B)$ dado por $\sigma(A) = -A - B$ y $\sigma(B) = B$. Tenemos $\delta_\psi(A) = [\psi(-A - B, A), A]$ y $\delta_\psi(B) = [\psi(-A - B, B), B]$. Si ψ corresponde a $f \in \mathcal{F}(A, B)$, entonces $\delta_\psi(A) = [A, \partial f/\partial A]$ y $\delta_\psi(B) = [B, \partial f/\partial B]$. Estas formulas se pueden considerar la ecuación Hamiltoniana correspondiente a f . Para continuar, se usa la conexión entre el bracket de Poisson del Hamiltoniano y el conmutador de los correspondientes campos vectoriales. \square

Notas. 1. Al elemento $f \in \mathfrak{t}_k(A, B)$ que corresponde a $\psi \in \mathfrak{grt}_1^n(k) \subset Ih(k)$ (ver prueba de la Proposición 6.1 se le puede dar la siguiente interpretación. Suponga que $\varphi \in M_1(k)$, y $\tilde{\varphi}$ se obtiene de φ por la acción de $\text{Exp}(\psi)$, donde Exp es la función exponencial $\mathfrak{grt}_1(k) \mapsto \text{GRT}_1(k)$. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie metrizada sobre k , y $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ corresponde al producto escalar en \mathfrak{g} , entonces $\Phi = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$ y $\tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}(ht^{12}, ht^{23})$ están relacionados por la transformación (1.11) para cierto $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ (ver Teorema A). Es fácil verificar que F se puede elegir tal que $1) F \equiv 1 \pmod{h^n}$, $2) h^{-n}(F - 1) \pmod{h} \in L_{n+1}$ donde L_{n+1} es el conjunto de elementos de $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ que son polinomios de grado no mayor que $n + 1$ en elementos de $\mathfrak{g} \otimes 1$ y $1 \otimes \mathfrak{g}$, y $3)$ la imagen de $h^{-n}(F - 1) \pmod{h}$ en $L_{n+1}/L_n = \text{Sym}^{n+1}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) = \text{Sym}^{n+1}(\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*)$, considerada una función en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, es igual a $-f_{\mathfrak{g}}$.

2. Deligne ha notado que, usando el argumento de la prueba de la Proposición 6.1, uno puede obtener para toda n un isomorfismo equivariante bajo la acción de S_n entre el cociente del álgebra de derivaciones especiales de $\mathfrak{t}_k(A_1, \dots, A_n)$ por el ideal de derivaciones internas y el cociente de $\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n)$ por el subespacio generado por los elementos (A_i, A_i) , $1 \leq i \leq n + 1$, donde $A_{n+1} = -A_1 - \dots - A_n$. A saber, el elemento $f \in \mathfrak{t}_k(A_1, \dots, A_n)$ corresponde a la derivación $A_i \rightarrow [A_i, \partial f/\partial A_i]$, $1 \leq i \leq n$.

Proposición 6.2. (Deligne-Ihara [13]). $\dim Ih^n(k) = \alpha_n - \beta_{n+1}$, donde

$$\alpha_n = (3n)^{-1} \left\{ \sum_{d|n} (1 - a(d/3)) \mu(d) 2^{n/d} - \varepsilon_n \right\},$$

$$\beta_n = (6n)^{-1} \left\{ \sum_{d|n} (1 + 3a(d/2) + 2a(d/3)) \mu(d) 2^{n/d} + 2\varepsilon_n \right\};$$

donde μ es la función de Möbius, $a(x) = 1$ para $x \in \mathbb{Z}$, $a(x) = 0$ para $x \notin \mathbb{Z}$, $\varepsilon_n = -1$ si n es de la forma 3^m , $\varepsilon_n = 2$ si $n = 2 \cdot 3^m$, y $\varepsilon_m = 0$ en otro caso.

Demostración. Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 con base A, B . En V existe una acción de S_3 , que permuta A, B y $C = -A - B$. Sea $L_n(V)$ el componente homogéneo de grado n del álgebra de Lie libre generada por V , i.e., $L_n(V) = \mathfrak{fr}_k^n(A, B)$. La formula $\psi \mapsto A \otimes \psi(-A - B, A) + B \otimes \psi(-A - B, B)$ define un isomorfismo $\text{Ih}^n(k) \xrightarrow{\sim} (V \otimes L_n(V))^{S_3} \cap \text{Ker } f$, donde f es el conmutador $V \otimes L_n(V) \mapsto L_{n+1}(V)$. Como f es suprayectiva, tenemos $\dim \text{Ih}^n(k) = \dim(V \otimes L_n(V))^{S_3} - \dim(L_{n+1}(V))^{S_3}$. Ahora usamos la formula para el carácter de la representación de $\text{GT}(V)$ en $L_n(V)$ ([16, Capitulo II, §3, formula (16)]) \square

Aquí están los valores de los números $a_n = \dim \text{Ih}^n(k)$ para $n \leq 13$: $a_1 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$, $a_3 = a_5 = a_8 = 1$, $a_7 = a_{10} = 2$, $a_9 = 4$, $a_{11} = 9$, $a_{12} = 7$, $a_{13} = 21$. Una base en $\bigoplus_{n \leq 7} \text{Ih}^n(k)$ esta formada por los elementos de $\text{Ih}(k)$ correspondientes (ver Proposición 6.1) a los elementos $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{F}(A, B)$, donde

$$f_1 = ([A, B], [A, B]) \quad (6.1)$$

$$f_2 = (x, x) + (x, y) + (y, y), \quad \text{donde } x = [A, [A, B]] \\ y = [B, [A, B]] \quad (6.2)$$

$$f_3 = (z, z), \quad \text{donde } z = [A, [A, [A, B]]] + [A, [B, [A, B]]] \\ + [B, [B, [A, B]]], \quad (6.3)$$

$$f_4 = ([[A, u], [B, u]], u) \quad \text{donde } u = [A, B]. \quad (6.4)$$

En el proceso de probar la [14, Proposición 1], Ihara obtuvo el siguiente resultado.

Proposición 6.3. *Para todo $n \geq 3$ impar existe un $\psi \in \mathfrak{grt}_1^n(k)$ tal que*

$$\psi(A, B) = \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} (adA)^{m-1} (adB)^{n-m-1} [A, B] \quad \text{mód } [\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_k],$$

donde \mathfrak{p}_k es el conmutador de $\mathfrak{fr}_k(A, B)$.

La prueba de Ihara usa $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Proveemos otra prueba. Uno puede asumir $k = \mathbb{C}$. Pongamos $\overline{\varphi}_{KZ}(A, B) = \varphi_{KZ}(-A, -B)$. De la Proposición 5.5, $\overline{\varphi}_{KZ}$ se obtiene de φ_{KZ} por la acción de algún $g \in \text{GRT}_1(\mathbb{C})$. Sea $\tilde{\psi}$ el componente homogéneo de grado n de la imagen de g bajo el mapeo logarítmico $\text{GRT}_1(\mathbb{C}) \mapsto \mathfrak{grt}_1(\mathbb{C})$. De (2.15) se puede verificar fácilmente que $(n(2\pi i)^n / 2\zeta(n)) \cdot \tilde{\psi}$ es el elemento deseado. \square

No es difícil ver que si $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{p}_k$, entonces el lado derecho de (5.21) pertenece a $[\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_k]$. Se sigue de la Proposición 6.3 que $\mathfrak{grt}_1(k)$ tiene al menos un generador de grado n para cada impar $n \geq 3$.

Preguntas. ¿Es cierto que $\text{grt}_1^n(k)$ tiene exactamente un generador de grado n para cada impar $n \geq 3$ y no tiene generadores de otros grados? ¿El álgebra $\bigoplus_n \text{grt}_1^n(k)$ es libre?

Notas. 1. Una respuesta positiva a esta pregunta es equivalente a la conjunción de la conjetura de Deligne en [14, Introducción] y la conjetura de densidad de la imagen de Zariski de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en $GT(\mathbb{Q}_l)$.

2. Para $n = 1, 2, 4, 6$ tenemos $\text{grt}_1^n(k) = \underline{Ib}(k) = 0$. Dado que $\dim Ib^3(k) = \dim Ib^5(k) = 1$, se sigue de la Proposición 6.3 que $\text{grt}_1^n(k) = \underline{Ib}^n(k)$ para $n = 3, 5$. Dado que $\dim Ib^8(k) = 1$, y $[Ib^3(k), Ib^5(k)] \neq 0$ (ver [14]), tenemos $\text{grt}_1^8(k) = Ib^8(k) = [\text{grt}_1^3(k), \text{grt}_1^5(k)]$. Se puede mostrar que $\dim \text{grt}_1^7(k) = 1 < \dim Ib^7(k)$ y $\text{grt}_1^7(k)$ es generado por el elemento correspondiente a $8f_3 - f_4 \in \mathcal{F}(A, B)$, donde f_3 y f_4 son determinados por las formulas (6.3) y (6.4).

Referencias

- [1] V. G. Drinfeld. Quasi-hopf algebras. *Leningrad Math. J.*, pages 1419–1457, 1990.
- [2] Alexandre Grothendieck. Esquisse d'un programme. *preprint*, 1984.
- [3] V. G. Drinfeld. Quantum groups. *Proc. Internat. Congr. Math*, Berkeley, 1986.
- [4] L. D. Faddeev. Integrable models in $(1+1)$ dimensional quantum field theory. *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics (Les Houches, 1982)*, pages 561–608, 1984.
- [5] N. Yu. Reshetikhin. Quasitriangular hopf algebras, solutions of the yang-baxter equation and invariants of connections. *Leningrad. Math. J.*, 1990.
- [6] Pierre Deligne and J. S. Milne. Tannakian categories, hodge cycles, motives and shimura varieties. *Lecture Notes in Math*, pages 101–228, 1980.
- [7] Toshitake Kohno. Monodromy representations of braid groups and yang-baxter equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, pages 139–160, 1987.
- [8] Toshitake Kohno. Quantized universal enveloping algebras and monodromy of braid groups. *preprint Nagoya Univ, Nagoya*, 1988.
- [9] Akihiro Tsuchiya and Yukihiko Kanie. Vertex operators in conformal field theory on p^1 and monodromy representations of braid groups. *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models, Adv. Stud. Pure Math*, pages 297–372, 1988.
- [10] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov. Current algebra and wess-zumino models in two dimensions. *Soviet J. Nuclear Phys.*, (1), 1984.

- [11] Pierre Deligne. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, galois groups over q . *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 79–297, 1989.
- [12] Greg Anderson and Yusataka Ihara. Pro- l branched coverings of p^1 and higher circular l -units. *Ann. of Math.*, (128):271–293, 1988.
- [13] Yasutaka Ihara. Some problems on three-point ramifications and associated large galois representations. *Adv. Stud. Pure Math.*, (12):173–188, 1987.
- [14] Yasutaka Ihara. The galois representations arising from $p^1 - \{0, 1, \infty\}$ and tate twist of even degree. galois groups over q . *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 299–313, 1989.
- [15] Yasutaka Ihara. Automorphisms of pure sphere braid groups and galois representations,. *preprint Tokyo Univ. Tokyo*, 1988.
- [16] N. Bourbaki. Elements de mathematique, fasc, xxxvii, groupes et algebres de lie, chaps, 17. *Actualites Sci. Indust.*, (1349), 1972.
- [17] Toshitake Kohno. Serie de poincare-koszul associee aux groupes de tresses pures. *Invent. Math.*, (82):57–75, 1985.
- [18] Yu. A. Bakhturin. Identical relations in lie algebras. *VNU Science Press, Utrecht*, 1987.
- [19] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Univ. Press, New York, 1962. 4th ed.
- [20] Emil Artin. Theory of braids. *Ann. of Math*, 1947.
- [21] G. V. Belyi. On galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Math. USSR Izv*, 1980.
- [22] G.W. Moore and Nathan Seiberg. Classical and quantum conformal field theory. *Comm. Math. Phys*, 1989.
- [23] Michael Barr. Harrison homology, hochschild homology and triples. *J. Algebra*, 1968.

Traducido por Eric R. Dolores Cuenca